

UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PELOTAS  
CENTRO DAS CIÊNCIAS SOCIAIS E TECNOLÓGICAS  
MESTRADO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA E COMPUTAÇÃO

JULIANO ROSINHA BARBOZA

**Filtro de Kalman Baseado em Kernels para  
Estimação de Sistemas Não Lineares e  
Variantes no Tempo: Aplicação ao  
Cancelamento de Eco**

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito  
parcial para obtenção do grau de Mestre em  
Engenharia Eletrônica e Computação

Orientador: Prof. Dr. Sérgio José M. de Almeida  
Coorientador: Prof. Dr. José Carlos M. Bermudez

Pelotas  
2016

## CIP — CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Barboza, Juliano Rosinha

Filtro de Kalman Baseado em Kernels para Estimação de Sistemas Não Lineares e Variantes no Tempo: Aplicação ao Cancelamento de Eco / Juliano Rosinha Barboza. – Pelotas: 2016.

68 f.: il.

Projeto de dissertação (mestrado) – Universidade Católica de Pelotas. 2016. Orientador: Sérgio José M. de Almeida; Coorientador: José Carlos M. Bermudez.

1. Filtro de Kalman. 2. Espaço de Hilbert definido por Kernels Reprodutivos. 3. Não Linear. 4. Não Estacionário. 5. Eco Acústico. I. Almeida, Sérgio José M. de. II. Bermudez, José Carlos M..

UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PELOTAS

Reitor: Prof. José Carlos Pereira Bachettini Júnior

Pró-Reitor-Acadêmico: Prof. Patrícia Haertel Giusti

Coordenador de Pesquisa e Pós-Graduação Stricto Sensu: Prof. Ricardo Tavares Pinheiro

Diretora do Centro das Ciências Sociais e Tecnológicas: Prof. Ana Cláudia Lucas

Coordenador do Mestrado em Engenharia Eletrônica e Computação: Prof. Eduardo Antonio César da Costa

*“O provimento dos sucessos não vem das conquistas,  
mas sim da resiliência.”*

LOYHAN F. TORRES

## AGRADECIMENTOS

À Universidade Católica de Pelotas, ao Programa de Pesquisa e Pós-Graduação e, em especial, à Coordenadoria do Mestrado de Engenharia Eletrônica e Computação, representada pelo Prof. Dr. Eduardo Antônio César da Costa, pela oportunidade de retorno à instituição no papel de mestrando.

Ao orientador deste trabalho, Prof. Dr. Sérgio José Melo de Almeida, e ao co-orientador, Prof. Dr. José Carlos Bermudez, pela confiança depositada, pela compreensão e acima de tudo, pelos ensinamentos que me foram dispensados durante os meses em que compartilhamos esta jornada.

À Contronic Sistemas Automáticos, em especial ao Dr. Maurício Tavares e ao Sidinei Seus, pelos quais expresso minha profunda gratidão pelo apoio incondicional para conclusão do mestrado.

Aos amigos Douglas Scheunemann e Gustavo Ott pelo apoio e ensinamentos. À Leila Cardozo, Rodrigo e Glaucia Prestes, Aline Ornel e Ana Carolina Cuimbra pelo incentivo e companherismo.

À minha mãe Fátima e ao meu irmão Bruno, obrigado pelo apoio, pela compreensão, pelo auxílio e carinho incessante de hoje e sempre.

Por fim, presto reverência a memória de duas pessoas fundamentais na minha construção humana, acadêmica e profissional, que deixaram este plano durante a realização do mestrado. Ao meu pai Ruy e à minha tia Rosângela, ainda que eu tente traduzir em palavras, jamais haverão definições suficientes que expressem de forma genuína a minha gratidão. Fica o compromisso da colheita dos bons frutos plantados por suas mãos, mentes e corações.

## RESUMO

O eco acústico é um fenômeno causado pela reflexão do som quando este é percebido por sua fonte emissora com algum atraso, agindo, nos sistemas de comunicação *full duplex* de forma prejudicial na interação entre os interlocutores, ocasionando a redução da inteligibilidade das informações trocadas. Dessa forma, por se tratar de um efeito bastante desagradável, faz-se necessária a aplicação de procedimentos cuja finalidade seja atenuar, ou se possível, eliminar tal fenômeno. Diversas técnicas têm sido apresentadas na literatura com o objetivo de cancelar o eco acústico, onde se destaca a aplicação de estruturas baseadas na filtragem adaptativa. Normalmente, em estratégias onde a filtragem adaptativa é utilizada, assume-se que o caminho percorrido pelo eco acústico pode ser modelado como um sistema linear e invariante no tempo. Entretanto, em virtude do conjunto de elementos que formam tal caminho, tais como os amplificadores e os alto-falantes, apresentarem características não lineares, os modelos lineares não conseguem representar de forma adequada todo o caminho percorrido pelo eco acústico. Considerando que em ambientes acústicos o sinal a ser modelado pode ser modificado pela circulação de pessoas e movimentação de objetos, em recentes abordagens, têm-se assumido que a resposta do eco deve obedecer a modelos não lineares e não estacionários. Dessa forma, o modelo adequado de representação da resposta se torna fundamental para que o sistema adaptativo utilizado na identificação e cancelamento do eco tenha um desempenho satisfatório. Este trabalho propõe uma nova técnica na estimação não linear e variante no tempo a partir da aplicação da teoria de filtragem de Kalman, que apresenta uma boa resposta na identificação de sistemas não estacionários, em um Espaço de Hilbert definido por Kernel Reprodutivo, onde a não linearidade poderá ser tratada de forma linear, utilizando como exemplo de aplicação o cancelamento do eco acústico.

**Palavras-chave:** Filtro de Kalman. Espaço de Hilbert definido por Kernels Reprodutivos. Não Linear. Não Estacionário. Eco Acústico.

# **Kalman Filter Based on Kernels for Estimation of Nonlinear Systems and Time Variants: Application to Echo Cancellation**

## **ABSTRACT**

Acoustic echo is a phenomenon caused by the reflection of sound when it is perceived by its emission source with some delay. It appears in full duplex communication systems in a detrimental manner to the interaction between the speakers, reducing the intelligibility of exchanged information. Because it is a very unpleasant effect, acoustic echo attenuation or canceling procedures, if possible, become necessary procedures to mitigate such phenomenon. Several techniques have been reported in the literature in order to cancel acoustic echo, which includes the application of structures based on adaptive filtering. Typically, strategies where the adaptive filtering is used, it is assumed that the path traveled by the acoustic echo can be modeled as a linear time-invariant system. However, because the elements that form such a path, such as amplifiers and speakers, present non-linear characteristics, linear models fail to adequately represent the whole path traveled by the acoustic echo. In recent approaches it has been assumed that the echo response should obey non-linear and non-stationary models, whereas in acoustic environments the signal to be modeled can be modified by the movement of people and objects. Thus, the appropriate response representation model becomes essential for satisfactory adaptive system's performance on echo identification and cancellation. This work aims to propose a new technique in the nonlinear and time variant estimation from the application of the Kalman filtering theory, which presents a good answer in the identification of non-stationary systems, in a Hilbert Space defined by Reproductive Kernel, where linearity can be treated linearly, using as an example of application the cancellation of acoustic echo.

**Keywords:** Kalman Filter, Reproducing Kernel Hilbert Space, Nonlinear, Nonstationary, Echo Cancellation.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEC	<i>Acoustic Echo Canceller</i>
AP	<i>Affine projection</i>
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
ERLE	<i>Echo Return Loss Enhancement</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
LMS	<i>Least Mean Square</i>
KF	<i>Kalman Filter</i>
KLMS	<i>Kernel Least Mean Square</i>
KKF	<i>Kernel Kalman Filter</i>
LMMSE	<i>Linear Minimum Mean Square Error</i>
MAP	<i>Maximum a Posteriori</i>
ML	<i>Maximum Likelihood</i>
MSE	<i>Mean Square Error</i>
MMSE	<i>Minimum Mean Square Error</i>
NLMS	<i>Normalized Least Mean Square</i>
RLS	<i>Recursive Least Square</i>
RKHS	<i>Reproducing Kernel Hilbert Space</i>
SD	<i>Steepest Descent</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>
WGN	<i>White Gaussian Noise</i>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Fenômeno do eco acústico.....	16
Figura 2.2	Sistemas de comunicação <i>full duplex</i> .....	17
Figura 2.3	Sistema baseado em filtro adaptativo para cancelamento do eco acústico.....	18
Figura 2.4	Filtro de Wiener: Modelo adaptativo.....	20
Figura 2.5	O Filtro de Kalman atuando no cancelamento do eco acústico.....	26
Figura 2.6	Algoritmo do Filtro de Kalman.....	27
Figura 2.7	Distorções não lineares em sistemas de comunicação.....	29
Figura 2.8	Diagrama de um alto-falante eletrodinâmico.....	30
Figura 2.9	Não estacionariedade em ambientes acústicos.....	31
Figura 3.1	Representação de um sistema não linear.....	33
Figura 3.2	Sistema não linear e variante no tempo.....	34
Figura 3.3	Cancelador de Eco Acústico.....	34
Figura 3.4	Cancelador de eco acústico não linear - Exemplo.....	38
Figura 3.5	Filtro de Volterra aplicado no cancelamento de eco acústico.....	40
Figura 3.6	Cancelador Eco Acústico não linear proposto em (FU; ZHU, 2008).....	41
Figura 3.7	Representação de uma função sigmoial $\varphi(n)$ para $\beta = 5$ .....	42
Figura 3.8	Representação de uma função sigmoial $\varphi(n)$ para $\alpha = 0,5$ .....	43
Figura 4.1	Mapeamento no espaço característico.....	47
Figura 4.2	Sistema de identificação adaptativo baseado em <i>kernel</i> .....	49
Figura 4.3	Estimador de ordem finita no RKHS.....	51
Figura 5.1	Cancelamento do eco acústico não linear e variante no tempo.....	52
Figura 5.2	Representação geométrica do problema da estimação linear.....	54
Figura 6.1	Sistema não linear e invariante no tempo a ser estimado.....	58
Figura 6.2	Exemplo A.1: Passo de convergência $\mu_{klms} = 0.05$ .....	59
Figura 6.3	Exemplo A.2: Passo de convergência $\mu_{klms} = 0.14$ .....	60
Figura 6.4	Exemplo B.1: Passo de convergência $\mu_{klms} = 0.05$ .....	60
Figura 6.5	Exemplo B.2: Passo de convergência $\mu_{klms} = 0.14$ .....	61
Figura 6.6	Exemplo C.1: Passo de convergência $\mu_{klms} = 0.05$ .....	62
Figura 6.7	Exemplo C.2: Passo de convergência $\mu_{klms} = 0.16$ .....	62

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Parâmetros do EKF.....	45
-----------------------------------	----

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
<b>1.1 Motivação</b> .....	<b>13</b>
<b>1.2 Objetivos</b> .....	<b>13</b>
<b>1.3 Organização do trabalho</b> .....	<b>14</b>
<b>2 O ECO ACÚSTICO E OS SISTEMAS DE CANCELAMENTO</b> .....	<b>16</b>
<b>2.1 O eco acústico</b> .....	<b>16</b>
<b>2.2 Cancelamento do eco acústico baseado na filtragem adaptativa</b> .....	<b>17</b>
<b>2.3 Estimadores recursivos lineares</b> .....	<b>19</b>
2.3.1 Teoria da filtragem de Wiener (algoritmos do gradiente estocástico).....	20
2.3.2 Teoria dos mínimos quadrados .....	24
2.3.3 Teoria da filtragem de Kalman.....	25
<b>2.4 O eco acústico como um problema de estimação não linear e variante no tempo</b> .....	<b>29</b>
<b>3 ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES E VARIANTES NO TEMPO</b> .....	<b>33</b>
<b>3.1 Teoria de Estimação - Uma breve revisão</b> .....	<b>34</b>
<b>3.2 Estimadores recursivos</b> .....	<b>35</b>
<b>3.3 Estimadores de sistemas não lineares</b> .....	<b>38</b>
3.3.1 Filtros polinomiais .....	38
3.3.2 Filtro baseado em séries de Volterra .....	39
3.3.3 Técnicas baseadas em transformações não lineares (transformação sigmoideal) .....	41
3.3.4 Filtro de Kalman Extendido.....	43
3.3.5 Filtro de Kalman Unscented .....	45
<b>4 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA FILTRAGEM ÓTIMA NÃO LINEAR NO ESPAÇO DE HILBERT DEFINIDO POR KERNEL REPRODUTIVO - RKHS</b> .....	<b>47</b>
<b>4.1 Modelamento em tempo real - Online</b> .....	<b>50</b>
<b>5 O ALGORITMO DO FILTRO DE KALMAN KERNELIZADO - KKF</b> .....	<b>52</b>
<b>5.1 Algoritmo KKF proposto</b> .....	<b>52</b>
<b>6 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES</b> .....	<b>58</b>
<b>7 CONCLUSÃO</b> .....	<b>64</b>
<b>7.1 Trabalhos futuros</b> .....	<b>64</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>66</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A estimação de parâmetros de sistemas tem sido estudada extensivamente ao longo das últimas décadas, considerando, na grande maioria dos casos, que estes apresentam um comportamento linear e invariante no tempo.

Sabe-se, porém, que em muitas situações tais sistemas podem apresentar uma não linearidade que impede o uso de estimadores lineares na sua identificação (WENG; BARNER, 2006).

As primeiras iniciativas de abordagem referentes à estimação de sistemas foram realizadas por Gauss e Legendre. Na ocasião ambos buscaram o desenvolvimento de técnicas que pudessem ser aplicadas especificamente à astronomia, como por exemplo, a estimação das posições de planetas e cometas a partir de medidas telescópicas.

Após mais de um século dos estudos pioneiros, outras soluções para identificação de sistemas foram propostas através dos trabalhos desenvolvidos por Wiener e Kolmogorov, relacionados a filtragem adaptativa.

No decorrer das pesquisas o aprimoramento e ampliação das técnicas propostas por Wiener e pela teoria de filtragem de Kolmogorov, expandiram-se para cenários considerando não linearidades, onde se destacam, por exemplo, as aproximações propostas pelas séries de Volterra (A. Guerin; G. Faucon ; R. Le Bouquin-Jeannes, 2003).

Diversos trabalhos abordando o problema da não linearidade vêm contribuindo, ao longo do tempo, para uma evolução conceitual do problema e com isso permitindo com que vários algoritmos venham sendo propostos. Entretanto, a maioria dos trabalhos assume algum tipo de restrição que os torna limitados a uma aplicação mais generalizada.

Considerando, além da não linearidade, que em algumas situações práticas como, por exemplo, no cancelamento do eco acústico, os sistemas podem apresentar não estacionariedades, cuja resposta ao impulso varia com o tempo, o filtro de Kalman surge como uma opção interessante para este tipo de cenário. Porém, o filtro de Kalman, um processo recursivo baseado no Teorema de Bayes e no estimador de Mínimo Erro Médio Quadrático Linear, do inglês *Linear Minimum Mean Square Error* (LMMSE) (KAY, 1993)(E. W. Kamen; J. K. Su., 1999), permite solucionar problemas exclusivamente lineares, a partir da estimativa de valores reais dada pela medição de grandezas e de valores associados.

Para contornar esse problema foi proposto na literatura o filtro de Kalman Estendido (*Extended Kalman Filter*) (E. W. Kamen; J. K. Su., 1999), que se caracteriza por ser uma simples extensão do filtro de Kalman para aplicação em sistemas não lineares. Esse algoritmo é

bastante utilizado em diversas aplicações. Contudo, o uso desta técnica pode resultar em alguns problemas ou resultados indesejáveis, em virtude de aproximações inerentes em sua derivação. O filtro de Kalman Estendido, além de não ser um estimador ótimo, depende que a estimação de seu estado inicial seja correta, pois do contrário o filtro poderá divergir rapidamente.

Outro filtro utilizado nesse contexto, é o filtro de Kalman Unscented (JULIER; UHLMANN, 2004). Esse algoritmo permite a estimação de estados em sistemas não lineares sem aplicar qualquer tipo de linearização às funções não lineares presentes no modelo. Isso se deve a uma técnica de transformação que gera um conjunto de vetores que, depois de submetidos à transformação não linear, mantem as mesmas características estatísticas (média e covariância). Embora com o filtro de Kalman Unscented tenha sido possível obter ótimos resultados, alguns problemas foram verificados durante sua execução como, por exemplo, a alta sensibilidade à inicialização da matriz de covariância, um dos parâmetros fundamentais na teoria de filtragem de Kalman. Assim, uma escolha inadequada dessa matriz de inicialização poderá levar o algoritmo a falhar por divergência. Esse é ainda um problema em aberto.

Recentemente, alguns trabalhos vêm focando no desenvolvimento do filtro de Kalman baseados em *kernels*, para estimação de sistemas não lineares, buscando preservar as propriedades dos estimadores ótimos lineares no Espaço de Hilbert definido por Kernel Reprodutivo, do inglês *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS), onde a não linearidade pode ser tratada de forma linear.

Em (RALAIVOLA; D'ALCHÉ-BUC, 2005), a derivação do filtro de Kalman é proposta de forma que todos os sinais possam ser mapeados no RKHS. Isto leva a uma formulação muito genérica do problema da estimação de sistemas não lineares ao preço de um processamento mais complexo que o exigido para muitas aplicações práticas. A formulação do problema exposto em (RALAIVOLA; D'ALCHÉ-BUC, 2005) assume que o ruído aditivo é um ruído Gaussiano de média zero no RKHS, que pode ser uma consideração desnecessária.

Mais recentemente uma alternativa na formulação do filtro de Kalman foi proposta em (ZHU; CHEN; PRINCIPE, 2014) visando a predição da saída de um sistema autônomo. Na proposta, o filtro de Kalman é construído no RKHS, a partir de observações ruidosas, evitando a definição de estados ocultos do filtro, como feito em (RALAIVOLA; D'ALCHÉ-BUC, 2005). O modelo de incertezas no RKHS também assume a presença de um ruído Gaussiano de média zero.

Ambas as formulações do filtro de Kalman (RALAIVOLA; D'ALCHÉ-BUC, 2005) (ZHU; CHEN; PRINCIPE, 2014) são orientadas à predição de séries temporais, não sendo aplicadas na identificação de sistemas como no cancelamento do eco acústico.

O presente trabalho propõe uma nova técnica aplicável na estimação não linear e variante no tempo, a partir da aplicação da teoria de filtragem de Kalman, que apresenta uma boa resposta na identificação de sistemas variantes no tempo, no RKHS, onde a questão da não linearidade é tratada através de uma representação linear, utilizando como exemplo de aplicação o cancelamento do eco acústico.

## 1.1 Motivação

A motivação deste trabalho é dada pela busca de uma técnica eficiente aplicável na estimação de sistemas não lineares e variantes no tempo, utilizando como exemplo de aplicação o cancelamento do eco acústico.

Nos sistemas de telecomunicações *full duplex*, formados por dois canais equidistantes, que trocam informações sonoras simultaneamente a partir de dispositivos eletro-acústicos de recepção e transmissão, o eco acústico surge quando um sinal previamente transmitido é reenviado para sua fonte geradora, com atraso, causando desconforto ao ouvinte e reduzindo o nível de inteligibilidade das informações recebidas.

Parte das aplicações propostas para o cancelamento do eco acústico se baseiam na estimação linear do caminho percorrido pelo eco, ou partem de um modelo de não linearidade conhecida, considerando nestes casos um ambiente estacionário, ou invariante no tempo.

Assim, observa-se uma lacuna não preenchida no que se refere ao uso de estimadores que considerem cenários mais próximos ao real, ou seja, com respostas não lineares e variantes no tempo.

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo propor uma técnica que seja aplicável na estimação de sistemas não lineares e variantes no tempo, utilizando o filtro de Kalman, que apresenta uma boa resposta na identificação de sistemas não estacionários, no RKHS, onde a não linearidade poderá ser tratada de forma linear, utilizando como exemplo de aplicação o cancelamento do eco acústico.

O método utilizado para o alcance do objetivo se baseia na revisão bibliográfica sobre os desafios implícitos na estimação não linear e variante no tempo, no cancelamento do eco acústico e das características dos principais estimadores como: os estocásticos, os baseados na

Teoria de Wiener, na Teoria dos Mínimos Quadrados e na Teoria de Filtragem de Kalman. Além disso, revisão sobre RKHS e alguns algoritmos *kernelizados* propostos, como o *Kernel Least Mean Square* (KLMS).

Após profunda revisão bibliográfica, foi elaborada a técnica culminando no desenvolvimento de um algoritmo, cujo resultados gerados por simulação são comparados com algoritmos de vanguarda como o KLMS (LIU; POKHAREL; PRINCIPE, 2007) e Filtro de Kalman original.

### 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho será dividido nos seguintes capítulos, na sequência:

- Capítulo 2 - Apresentação do fenômeno físico do eco acústico, a forma prejudicial com que atinge os meios de comunicação e o desafio envolvido no seu cancelamento, citando como exemplo alguns estimadores recursivos lineares aplicados em canceladores de eco acústico. Neste capítulo também são citadas algumas das principais fontes geradoras de não linearidades e flutuações de sistemas e ambientes acústicos, respectivamente;
- Capítulo 3 - Aborda a questão da estimação de sistemas não lineares e variantes no tempo, partindo de uma breve revisão sobre Teoria de Estimação, as principais características de estimadores recursivos, destacando aqueles aplicados na identificação de sistemas não lineares como: filtros polinomiais, filtro baseado em séries de Volterra, técnicas baseadas em transformações não lineares e os filtros derivados da teoria de filtragem de Kalman;
- Capítulo 4 - São apresentados os princípios básicos da filtragem ótima não linear no espaço de Hilbert definido por *kernel* reprodutivo e o desafio do modelamento de sistemas em tempo real no RKHS;
- Capítulo 5 - Desenvolvimento da técnica proposta para estimação não linear e variante no tempo, objetivo deste trabalho;
- Capítulo 6 - São apresentados os resultados obtidos através de simulação da técnica proposta, traçando um comparativo com outros algoritmos de vanguarda como, por exemplo, o KLMS;

- Capítulo 7 - Conclusão e sugestões para trabalhos futuros relacionados.

## 2 O ECO ACÚSTICO E OS SISTEMAS DE CANCELAMENTO

Neste capítulo será abordada a questão da não linearidade, presente em sistemas acústicos, e algumas situações que podem ocasionar este efeito, e como este problema tem sido mitigado através de supressores de eco. Também será abordada a questão da estacionariedade de um sistema e como ela pode ser prejudicial no cancelamento do eco acústico.

### 2.1 O eco acústico

O eco é um fenômeno originalmente acústico que ocorre quando uma fonte sonora emite um determinado som, recebendo de volta uma parcela deste som com certo atraso (MONTEZANO, 2003).

Na figura 2.1 se observa a representação gráfica da reflexão de uma onda sonora qualquer (cor verde), emitida por uma fonte geradora. O som depois de emitido colide em um obstáculo de forma que uma parcela retorna para a fonte que o emitiu em um intervalo, ou período de tempo, correspondente a distância percorrida pelo som e a sua velocidade de propagação. A

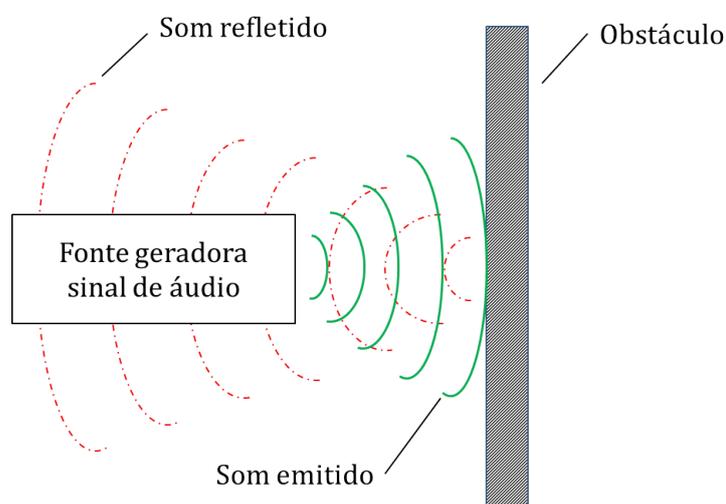


Figura 2.1 – Fenômeno do eco acústico.

ocorrência deste fenômeno pode ser dada em ambientes fechados ou em qualquer outro local onde a onda sonora encontre obstáculos durante a sua propagação.

Em sistemas de comunicação o eco acústico atua de forma prejudicial na interação entre os interlocutores envolvidos em uma conversa, uma vez que estes ouvem o retorno da própria voz com algum atraso. Nos sistemas de telecomunicações *full-duplex*, o eco acústico ocorre quando o sinal de áudio recebido de um interlocutor remoto é injetado novamente na linha de

transmissão, devolvendo uma parcela do som à fonte original. Isto permite que a fonte emissora receba parte da informação enviada somada ao sinal acústico emitido do lado oposto da linha de transmissão. A presença dessa parcela do som que retorna reduz a qualidade da comunicação e inteligibilidade das informações (BREINING et al., 1999).

Na figura 2.2 é representada uma linha de transmissão de um sistema de comunicação *full-duplex*, em que, o sinal enviado do microfone 'A' é emitido pelo alto-falante no ponto 'B'. Uma parcela deste sinal percorre um caminho, denominado como "caminho do eco", e novamente retorna à linha através do microfone em 'B', até o alto-falante em 'A'. Esse processo poderá se repetir indefinidamente enquanto houver uma fonte sonora ativa próxima ao microfone (BREINING, 1997) (BREINING et al., 1999) (GHOSE; REDDY, 2000).

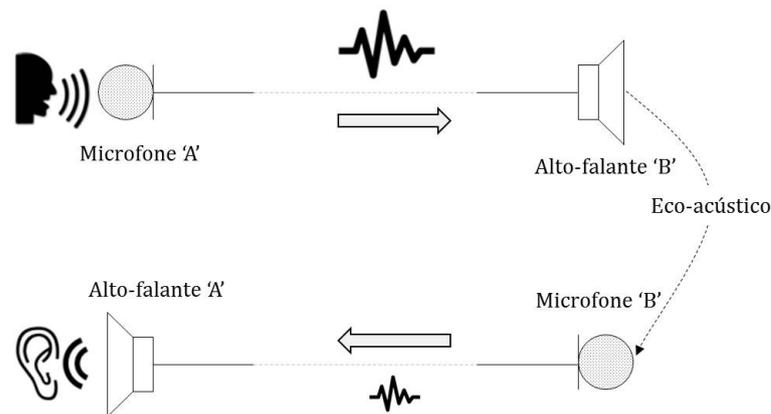


Figura 2.2 – Sistemas de comunicação *full duplex*.

Sendo o cancelamento do eco acústico em sistemas de comunicação um desafio instigante no meio científico e tecnológico, têm surgido na literatura, diversas alternativas para minimizar ou solucionar esse problema. Na próxima seção será apresentada uma abordagem para esse fim, baseado na filtragem adaptativa.

## 2.2 Cancelamento do eco acústico baseado na filtragem adaptativa

O cancelamento do eco acústico tem sido estudado durante anos como um problema de modelagem linear e invariante no tempo. Dessa forma, diversas técnicas têm sido apresentadas na literatura, dentre elas, as que utilizam estruturas de filtragem adaptativa para modelar o caminho do eco (resposta impulsiva do ambiente) tem sido amplamente explorada (MADER, 2000). (BREINING et al., 1999).

Na figura 2.3 é observada uma representação em blocos de um sistema para cancelamento do eco acústico onde uma estrutura adaptativa é colocada em paralelo com o caminho percorrido pelo eco.

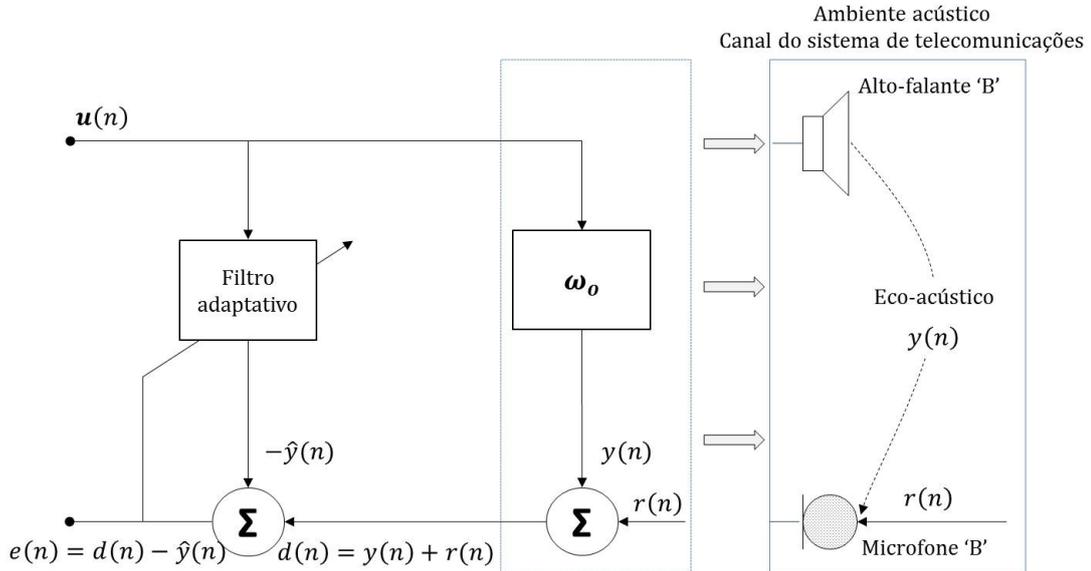


Figura 2.3 – Sistema baseado em filtro adaptativo para cancelamento do eco acústico.

O sinal de entrada  $u(n)$  da figura 2.3 representa o sinal de voz emitido pelo microfone 'A' na figura 2.2. Esse sinal irá se propagar pela linha até o alto-falante 'B' e ecoar pelo ambiente acústico cuja resposta ao impulso é definida na figura 2.3 pelo vetor de coeficientes  $w_o$ . O resultado desse processo é o retorno desse sinal ao alto-falante 'A' adicionado de um ruído assumido Gaussiano e de média zero, inerente ao ambiente, e definido por  $r(n)$ . Dessa forma, o sinal resultante será definido por:

$$d(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}_o + r(n) = y(n) + r(n) \quad (2.1)$$

O objetivo do bloco adaptativo observado na estrutura da figura 2.3 é tentar cancelar ou minimizar o efeito do eco acústico,  $y(n)$ , no alto-falante 'A', conforme mostra a figura 2.2. Assim, o sinal  $u(n)$  será o sinal de referência para o filtro, que irá tentar modelar o ambiente acústico, identificando os coeficientes  $w_o$ . A equação de saída estimada,  $\hat{y}(n)$ , do filtro adaptativo pode ser definida pela expressão (2.2):

$$\hat{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i(n)\hat{w}_i(n) = \mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n) \quad (2.2)$$

onde  $N$  é o número de coeficientes do filtro adaptativo e  $\hat{\mathbf{w}}(n) = [\hat{w}_0, \hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{N-1}]$ .

O objetivo é, desse modo, reduzir o erro  $e(n)$ , cuja equação será definida por (2.3), através de algum algoritmo específico para o ajuste dos coeficientes do filtro adaptativo.

$$e(n) = d(n) - \hat{y}(n) \quad (2.3)$$

O erro de estimação  $e(n)$  é um valor de amostra de uma variável aleatória. Assim, para minimizar esse erro é necessário escolher alguma função custo que permita otimizar o projeto do filtro. A função de mérito normalmente escolhida busca minimizar o valor do erro médio quadrático de  $e(n)$  (HAYKIN, 2008). Dessa forma, define-se a função custo como erro médio quadrático.

$$EMQ = E\{e^2(n)\} \quad (2.4)$$

onde  $E\{\cdot\}$  representa o *operador esperança estatístico* ou valor esperado. O objetivo é determinar as condições de operação em que o  $EMQ$  atinge seu valor mínimo.

Os algoritmos utilizados pelos filtros adaptativos para estimação são denominados estimadores recursivos lineares. Na seção a seguir é feita uma breve abordagem das classes conhecidas. Um estudo mais abrangente pode ser visto em (HAYKIN, 2008) e (MANOLAKIS, 2005).

### 2.3 Estimadores recursivos lineares

Os estimadores recursivos podem ser identificados como algoritmos adaptativos e classificados a partir de três teorias distintas (HAYKIN, 2008):

- Teoria da filtragem de Wiener
- Teoria dos mínimos quadrados
- Filtragem de Kalman

As três teorias serão apresentadas a seguir. Entretanto, a filtragem de Kalman será um pouco mais detalhada, já que serve de base para o estudo desse trabalho.

### 2.3.1 Teoria da filtragem de Wiener (algoritmos do gradiente estocástico)

Os algoritmos baseados no gradiente estocástico, propostos por Wiener, apresentam baixa complexidade computacional e pequeno desajuste, sendo aplicados, em geral, a sistemas lineares e estacionários. A seguir são apresentados alguns dos mais conhecidos dentro desta Teoria.

- **Filtro de Wiener**

O Filtro de Wiener utiliza um filtro transversal, mostrado na figura 2.4, como base estrutural para implementação do filtro adaptativo. A resposta ao impulso finita é definida pelo conjunto de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$ , para uma entrada  $\mathbf{u}(n)$ .

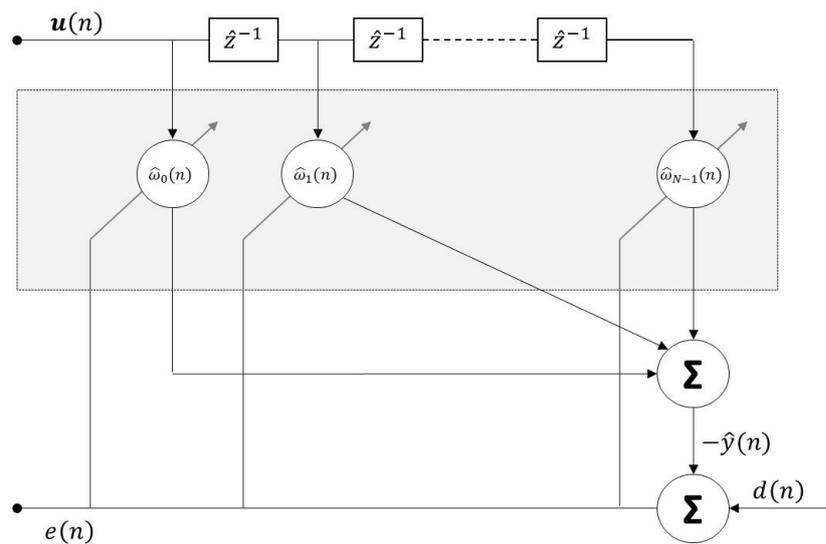


Figura 2.4 – Filtro de Wiener: Modelo adaptativo.

As equações do filtro são dadas por (2.5) e (2.6)

$$e(n) = d(n) - \hat{y}(n) \quad (2.5)$$

$$\hat{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} u(n-i)\hat{w}_i(n) = \mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n) \quad (2.6)$$

Considerando a equação do EMQ (2.7), e aplicando-a em (2.6), se obtém a função custo  $J(n)$  dada por (2.8)

$$EMQ = E \{e^2(n)\} = E \{(d(n) - \hat{y}(n))^2\} \quad (2.7)$$

$$J(n) = E \{d^2(n)\} - 2E \{d(n)\mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n)\} + E \{\mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n)\mathbf{u}(n)\hat{\mathbf{w}}^T(n)\} \quad (2.8)$$

Considerando que os coeficientes do filtro sejam fixos, a função custo pode ser simplificada através de

$$J(n) = E \{d^2(n)\} - 2\hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{p} + \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{w}} \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{p} = E \{d(n)\mathbf{u}(n)\}$  é o vetor de correlação cruzada entre a observação  $d(n)$  e o sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$ , e  $\mathbf{R} = E \{\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)\}$  é a matriz de correlação do sinal de entrada.

O vetor do gradiente ( $\nabla \mathbf{J}(n)$ ) da função custo dada em (2.9), relacionado aos coeficientes do filtro, é dado por

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{J}(n) &= \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \hat{\mathbf{w}}} = \left[ \frac{\partial J}{\partial \hat{w}_0}, \frac{\partial J}{\partial \hat{w}_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \hat{w}_N} \right] = \\ &= -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\hat{\mathbf{w}}(n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Igualando (2.10) a zero, e assumindo que  $\mathbf{R}$  seja uma matriz não-singular, busca-se um vetor ótimo de coeficientes que seja capaz de minimizar a função custo  $J(n)$ , e por consequência o EMQ. Isto se torna possível a partir de (2.11).

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (2.11)$$

A solução dada por (2.11), é conhecida como Solução de Wiener (HAYKIN, 2008), que requer o conhecimento exato do vetor  $\mathbf{p}$  e da matriz  $\mathbf{R}$ , o que na prática, como em aplicações em tempo real, não ocorre, pois requer o conhecimento completo das informações de entrada.

Na maioria dos algoritmos adaptativos busca-se estimar  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{R}$  através da média das informações de entrada, no domínio do tempo, onde a solução resultante é considerada como uma aproximação da solução de Wiener.

- ***Steepest Descent***

O *Steepest Descent* (SD) pode ser considerado como um tipo eficiente de algoritmo gradiente, se tratando de um método recursivo, no sentido que o algoritmo parte de um valor inicial arbitrário para o vetor de coeficientes  $\hat{\mathbf{w}}(n)$ , que é, então, atualizado a cada passo

de iteração.

À medida que o número de iterações aumenta, o conjunto de coeficientes em  $\hat{\mathbf{w}}(n)$  deve convergir para a solução de Wiener, dada por (2.11).

A principal vantagem do método SD é que este permite o rastreamento de variações temporais nas estatísticas do sinal, descartando a necessidade de resolver as equações cada vez que as estatísticas mudam.

A atualização do vetor de coeficientes no algoritmo SD é dado por (2.12)

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) - \frac{1}{2}\mu[-\nabla\mathbf{J}(n)] \quad (2.12)$$

Substituindo (2.10) em (2.12) obtém-se

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu[\mathbf{p} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{w}}(n)] \quad (2.13)$$

onde  $\mu$  é um coeficiente determinístico, que atua na correção do valor dos coeficientes do vetor  $\hat{\mathbf{w}}$ , de forma que estes se aproximem da solução de Wiener, dada por  $\mathbf{w}_o$ . O coeficiente  $\mu$  também é conhecido como largura do incremento ou passo de convergência. Desde que os autovalores da matriz de correlação  $\mathbf{R}$  sejam todos reais e positivos, a condição necessária e suficiente para convergência ou estabilidade do algoritmo SD é que, o passo de convergência  $\mu$  satisfaça a seguinte condição

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (2.14)$$

onde  $\lambda_{max}$  é o maior autovalor da matriz de correlação  $\mathbf{R}$ .

O desenvolvimento completo do algoritmo e análise da estabilidade do método SD pode ser analisado em (HAYKIN, 2008).

A principal desvantagem o algoritmo *Steepest Descent* pode ser considerada a partir da equação (2.13), onde se observa que, a cada iteração, é necessário estimar a matriz de correlação  $\mathbf{R}$  e o vetor de correlação cruzada  $\mathbf{p}$ , que dependem dos dados disponíveis do sinal de entrada, aumentando consideravelmente a complexidade computacional necessária.

- **O algoritmo *Least Mean Square* - LMS**

Criado por Bernard Widrow e Ted Hoff (HAYKIN, 2008), o LMS é um dos algoritmos mais utilizados em filtragem adaptativa por razões como: a baixa complexidade compu-

tacional e a garantia de convergência em ambientes estacionários (FU, 2007).

O algoritmo LMS não exige o conhecimento prévio das características do sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$ , utilizando estimativas instantâneas de suas estatísticas.

Os valores estimados dos coeficientes do filtro nunca atingem o valor ótimo (solução de Wiener), porém oscilam em torno de valores reais de  $\mathbf{w}(n)$ .

Caso o sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$  seja não estacionário, o algoritmo perde desempenho por ter que acompanhar a variação das características da entrada. Se  $\mathbf{u}(n)$  não contiver apenas ruído, o filtro pode também eliminar componentes significativos a partir das observações  $\mathbf{d}(n)$ .

Quando aplicada aritmética de precisão finita, os erros de arredondamento se acumulam ocasionado em não convergência do algoritmo ou adição de ruído à saída.

As equações (2.15) e (2.16) regem o algoritmo LMS no cálculo do erro  $e(n)$  e na atualização do vetor de coeficiente  $\hat{\mathbf{w}}(n)$ , respectivamente.

$$e(n) = d(n) - \mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n) \quad (2.15)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu e(n)\mathbf{u}(n) \quad (2.16)$$

A partir de (2.15) é possível medir a eficiência do estimador, no caso o filtro adaptativo LMS. Em (2.16) é equacionado o estado do estimador.

Como o algoritmo LMS não alcança uma solução ótima, os coeficientes não alcançam os seus valores ótimos no sentido absoluto, apesar da convergência ser obtida na média para uma pequena variância dos coeficientes. No entanto, se a variância dos coeficientes for grande, a convergência, em média, de  $e(n)$ , não será válida. Este problema pode ocorrer se o valor do passo de convergência  $\mu$  não for escolhido adequadamente.

O valor do passo de convergência  $\mu$  deve ser escolhido conforme equação

$$0 < \mu < \frac{2}{\text{tr}[\mathbf{R}]} \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de correlação do sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$ .

O algoritmo LMS é considerado lento, pois se mostra sensível ao espalhamento da matriz de correlação  $\mathbf{R}$ , ou seja, quanto mais correlacionado é o sinal, menos eficiente é o algoritmo.

- **O algoritmo *Normalized Least Mean Square* - NLMS**

A principal desvantagem do algoritmo LMS é a sua sensibilidade ao dimensionamento da entrada  $\mathbf{u}(n)$ , o que dificulta a escolha de um passo de convergência  $\mu$  que garanta a estabilidade do algoritmo (HAYKIN, 2008).

O algoritmo NLMS é uma variação do LMS, que busca aumentar a velocidade de convergência do algoritmo através da normalização do passo  $\mu$  com a potência de entrada (CORADINE, 1993), dado por

$$\frac{\mu_{NLMS}}{\gamma + \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)} \quad (2.18)$$

onde  $\gamma$  representa um valor muito pequeno, sendo desconsiderado em alguns casos.

O valor do passo de convergência  $\mu$  deve ser escolhido conforme relação

$$0 < \mu_{NLMS} < 2 \quad (2.19)$$

As equações (2.20) e (2.21), regem o algoritmo NLMS e são aplicadas para o cálculo do erro  $e(n)$  a partir da observação  $d(n)$  e a atualização do vetor de coeficientes  $\hat{\mathbf{w}}(n)$ , ou ainda, da equação do estado do filtro NLMS, respectivamente.

$$e(n) = d(n) - \mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n) \quad (2.20)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \frac{\mu_{NLMS}}{\gamma + \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)}e(n)\mathbf{u}(n) \quad (2.21)$$

Devido à velocidade de convergência relativamente rápida e sua baixa complexidade computacional, o algoritmo NLMS tem sido aplicado em algumas propostas de canceladores de eco acústico, onde se busca representar a não linearidade no caminho percorrido pelo eco por uma função linearmente parametrizável (FU, 2007).

### 2.3.2 Teoria dos mínimos quadrados

Baseado no método dos Mínimos Quadrados Recursivos ou *Recursive Least Square* (RLS), o algoritmo pode ser visto como uma versão determinística da teoria dos filtros de Kalman será discutida na sequência, apresentando alta robustez e velocidade de convergência.

Entretanto, este bom desempenho é obtido à custa de um grande aumento na complexidade computacional, quando comparado a algoritmos de gradiente estocásticos. As equações

(2.22) até (2.25) regem o algoritmo RLS

$$e(n) = d(n) - \mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n-1) \quad (2.22)$$

$$\Psi(n) = \mathbf{S}_D(n-1)\mathbf{u}^T(n) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{S}_D(n) = \frac{1}{\lambda_{RLS}}\mathbf{S}_D(n-1)\mathbf{u}(n) - \frac{\Psi(n)\Psi^T(n)}{\lambda + \Psi^T(n)\mathbf{u}(n)} \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = \hat{\mathbf{w}}(n-1) + e(n)\mathbf{S}_D(n)\mathbf{u}(n) \quad (2.25)$$

onde o parâmetro  $\lambda_{RLS}$  é chamado fator de esquecimento, cujo valor deve ser escolhido no intervalo entre  $0 \ll \lambda_{RLS} \ll 1$  e  $\mathbf{S}_D(n)$  a inversa da matriz de correlação do sinal de entrada  $R(n)$ .

### 2.3.3 Teoria da filtragem de Kalman

As equações do filtro de Kalman foram propostas na década de 60 pelo estatístico húngaro-americano Rudolf Kalman, no contexto do programa espacial americano que levaria a Appollo 11 à Lua em 1969, sendo posteriormente aplicada a outras áreas como a Meteorologia (THACKER; LACEY, 1998), por exemplo.

O filtro de Kalman é baseado no estimador LMMSE, que será visto no capítulo 3, e na estimação Bayesiana, sendo utilizado para estimar o estado instantâneo de um sistema dinâmico linear, contaminado com ruído e outras incertezas, através do uso de medições linearmente relacionadas com este estado.

Destacam-se, em relação ao Filtro de Kalman, duas características atrativas para o uso na estimação de um sistema variante no tempo:

- Pode ser visto como um estimador sequencial de sinal na presença de ruído, para casos em que o comportamento dinâmico do parâmetro a ser estimado possa ser caracterizado por uma equação de estados;
- Permite a estimação linear no caso em que as observações são vetoriais e os parâmetros, além do ruído, sejam não estacionários.

As equações do filtro de Kalman podem ser divididas em dois grupos distintos: equações de estado e equações de medição, de tal forma que estes dois grupos atuem sinergicamente.

As equações de estado são responsáveis pela atualização das variáveis de estado e da matriz de covariância do erro, no tempo, obtendo, desta forma a estimativa *a priori* para a próxima estimativa.

As equações de medição são responsáveis pela realimentação do algoritmo, que incluem uma nova informação gerada a partir da observação na estimativa *a priori*, de forma que obtenha um ganho, ou melhoria, na estimação *a posteriori*.

Considerando como exemplo o diagrama de blocos da figura 2.5, que representa um sistema acústico dotado um cancelador de eco criado a partir do filtro de Kalman.

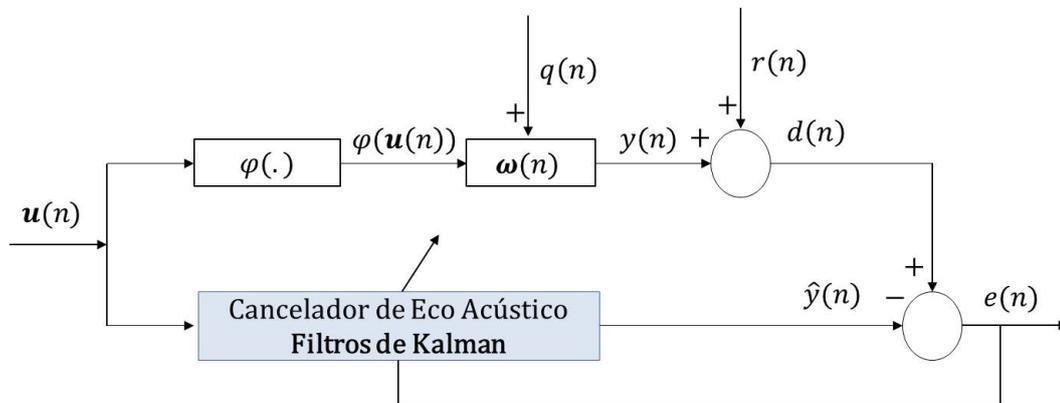


Figura 2.5 – O Filtro de Kalman atuando no cancelamento do eco acústico.

Considera-se que  $w(n)$  representa a resposta ao impulso de um sistema, a partir de uma entrada  $\varphi(u(n))$  não linear, caracterizada por uma função não linear  $\varphi(\cdot)$  desconhecida, contaminado por um ruído  $q(n)$ , Gaussiano de média zero, característico da flutuação do estado e  $d(n)$  a medição, ou observação, acrescentada de um ruído Gaussiano  $r(n)$ , de média zero.

Os ruídos  $q(n)$  e  $r(n)$  são independentes entre si, com matriz de covariância  $\mathbf{Q} = \sigma_q^2 I$  e  $\mathbf{R} = \sigma_r^2 I$ , respectivamente.

Busca-se então, através de equações do estado  $w(n)$  e medição  $d(n)$ , aproximar  $\hat{y}(n)$  de  $y(n)$ .

Na figura 2.6 é exemplificado, através de um diagrama, como procede o algoritmo do filtro de Kalman.

Considerando  $\hat{w}_n^-$  uma estimativa *a priori* do estado, já disponível no momento  $n$ , verifica-se as equações (2.26) até (2.30).

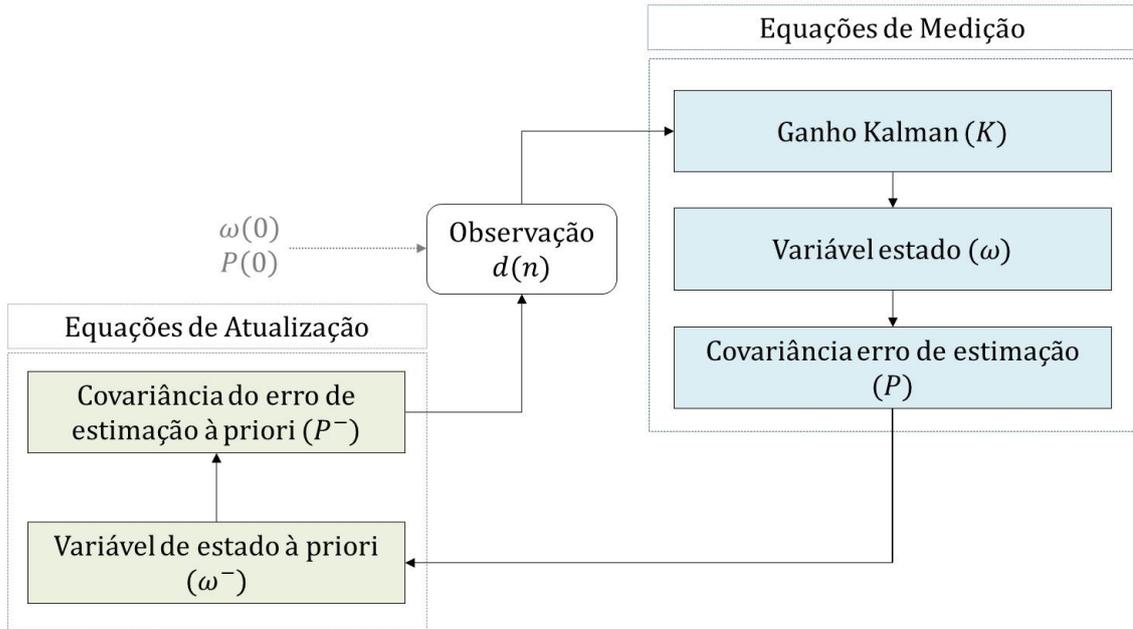


Figura 2.6 – Algoritmo do Filtro de Kalman.

Atualização do estado:

$$\hat{w}^-(n) = A\hat{w}^-(n-1) \quad (2.26)$$

onde  $\hat{w}^-$  é a estimativa *a priori* do estado  $w(n)$  e  $A$ , uma matriz de valores fixos pré-determinados. Considera-se, em muitos casos,  $A = I$ .

Atualização da matriz de covariância da estimativa *a priori*:

$$P^-(n) = AP(n-1)A^T + \Gamma Q(n)\Gamma^T \quad (2.27)$$

onde  $Q(n)$  é a matriz de covariância da flutuação do estado  $q(n)$  e  $\Gamma$ , uma matriz de valores fixos pré-determinados, considerada em muitos casos  $\Gamma = I$ .

Matriz Ganho de Kalman:

$$K(n) = P^-(n)C^T[CP^-(n)C^T + R(n)]^{-1} \quad (2.28)$$

onde  $C$  é uma matriz de valores fixos pré-determinados. Em alguns modelos considera-se  $C = I$ .

Atualização do estado (estimativa *a posteriori*):

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = \hat{\mathbf{w}}^-(n) + \mathbf{K}(n)[d(n) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{w}}^-(n)] \quad (2.29)$$

Covariância estimada (estimativa *a posteriori*):

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^-(n) - \mathbf{K}(n)\mathbf{C}\mathbf{P}^-(n) \quad (2.30)$$

Após a nova observação  $d(n)$ , o primeiro passo é determinar o ganho  $\mathbf{K}(n)$  dado pela equação (2.28). Em seguida, a nova observação  $d(n)$  é acrescentada à estimativa *a priori*  $\hat{\mathbf{w}}^-(n)$  juntamente do ganho calculado em (2.28), gerando uma estimativa *a posteriori*  $\hat{\mathbf{w}}(n)$ , dada pela equação (2.29). O último passo da atualização se refere ao cálculo da matriz de covariância *a posteriori* do erro de estimação, dado por (2.30).

O ciclo do algoritmo se repete para o instante de tempo  $n + 1$  sendo que os valores  $\hat{\mathbf{w}}(n)$  e  $\mathbf{P}(n)$  se tornam dados de entrada para as equações (2.26) e (2.27), respectivamente.

Esta natureza recursiva do modelo do filtro de Kalman o torna um poderoso instrumento de atualização de medidas *online*. Este é um dos principais motivos da sua aplicação em sistemas de controle, rastreamento, e outras áreas na engenharia eletrônica e da computação, sendo aplicável em ambientes com alto grau de não estacionariedade.

O filtro de Kalman funciona recursivamente, necessitando apenas da última estimativa e não do histórico completo do estado de um sistema, para calcular o próximo estado (PALEOLOGU; BENESTY; CIOCHIN, 2013), apresentando uma rápida convergência, quando comparado aos demais algoritmos, como o LMS, por exemplo.

Além disso, em ambientes acústicos que apresentam graus de não estacionariedade significativos, os algoritmos adaptativos tradicionais não conseguem acompanhar (capacidade de *tracking*) mudanças do canal (mudança da resposta ao impulso do canal acústico, por exemplo) de forma eficiente (BIRKETT; GOUBRAN; KNAPPE, 1995), tornando o filtro de Kalman uma solução promissora para esse tipo de situação.

Em detrimento desses benefícios, o filtro de Kalman geralmente requer uma complexidade computacional significativa, quando comparada a outros algoritmos, além de um cuidado redobrado no modelamento do estado e da matriz de covariância  $\mathbf{P}$ . Em (E. W. Kamen; J. K. Su;, 1999) são apresentados alguns cuidados que devem ser adotados no modelamento do estado.

Em sistemas não lineares o filtro de Kalman não é, a rigor, aplicável, pois a hipótese de linearidade é importante para a dedução do filtro de Kalman como um filtro ótimo, a partir do

LMMSE.

Devido a isso, foram propostas variações do filtro de Kalman, visando sua aplicação em sistemas não lineares, como: *Extended Kalman Filter* (EKF) (HAYKIN, 2008) e *Unscented Kalman Filter* (UKF) (JULIER; UHLMANN, 2004), que serão abordados no capítulo 3.

## 2.4 O eco acústico como um problema de estimação não linear e variante no tempo

Embora durante décadas, diversos trabalhos tenham estudado extensivamente o cancelamento do eco acústico como um problema linear e invariante no tempo, na prática, esses sistemas, de característica eletroacústica, apresentam certo grau de não linearidade e variância no tempo (WENG; BARNER, 2006), que impõem um maior desafio na definição do estimador de parâmetros utilizado na construção do cancelador de eco.

Dentre as distorções não lineares citam-se aquelas ocorridas devido às características elétricas do amplificador e alto-falante, do acoplamento do som pelo ar e da vibração do invólucro, geralmente plástico, onde estão fixados os dispositivos de emissão e captação do som (BIRKETT; GOUBRAN; KNAPPE, 1995), como por exemplo celulares e equipamentos utilizados em áudio-conferência.

Na figura 2.7 são destacadas (blocos sombreados) as não linearidades (distorções) no caminho do eco (caminho eletroacústico). Esses efeitos não lineares ocorrem basicamente nos amplificadores e alto-falantes.

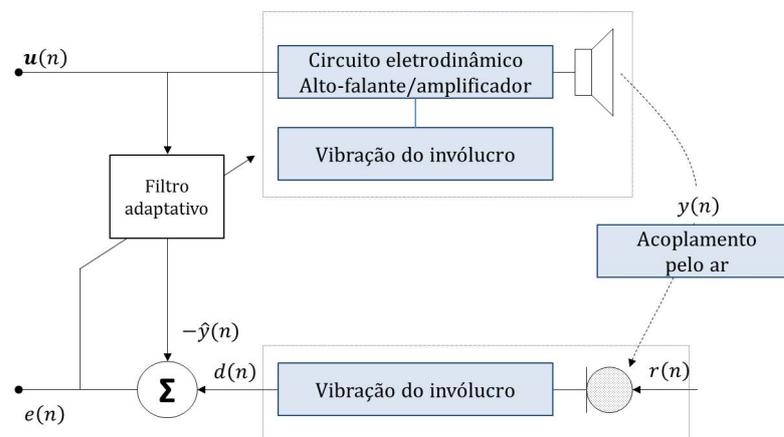


Figura 2.7 – Distorções não lineares em sistemas de comunicação.

Embora os amplificadores representem um importante componente nos sistemas de comunicação, permitindo que uma determinada informação seja transmitida de forma adequada,

eles podem distorcer o sinal introduzindo ruídos adicionais na banda de frequência do sinal transmitido. Esta interferência deve ser controlada sempre que possível (LIANG et al., 1999).

Em relação aos alto-falantes, estes quando operam principalmente em níveis sonoros mais elevados (BURTON, 2010), provocam uma distorção do sinal transmitido, tornando o problema do cancelamento do eco um desafio mais complexo.

Na figura 2.8 se mostra em detalhes a representação estrutural de um alto-falante eletrodinâmico.

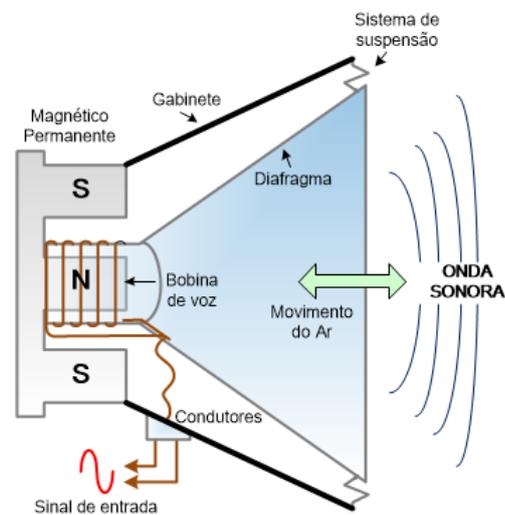


Figura 2.8 – Diagrama de um alto-falante eletrodinâmico.

Destacam-se como fontes de não linearidades, originadas pelo alto-falante (KLIPPEL, 2015):

- O sistema de suspensão do alto-falante, que interliga o gabinete e o diafragma do dispositivo - apresenta uma rigidez não linear que resulta na distorção do sinal da voz, principalmente nas baixas frequências;
- Diafragma - vibrações não lineares podem ocorrer, em altas frequências, devido à alta tensão e deformação no material empregado no componente em destaque;
- A força motriz na bobina de voz - pode ser modelada como uma função não linear de seu deslocamento, em razão do campo magnético resultante da geometria do núcleo magnético e do espaçamento. Somado a isto, a indutância na bobina de voz varia de forma não linear ao se deslocar;
- A propagação não linear das ondas sonoras, que tende acontecer somente em alto-falantes do tipo corneta.

Além do comportamento básico dos amplificadores e alto-falantes, outros fatores podem contribuir também na distorção não linear nesses dispositivos como: peças com folgas mecânicas, contato indevido da bobina com o núcleo magnético, entre outros (BURTON, 2010).

Como abordado inicialmente, além do problema das não linearidades presentes em sistemas de comunicação, no caso ambiente acústico, outro fator torna a missão do cancelamento do eco acústico um desafio complexo. Tratam-se das variações no caminho do eco que tornam o sistema não estacionário. Ambientes não estacionários se caracterizam pela ocorrência de mudanças no tempo da resposta ao impulso de um determinado sistema. Essas variações temporais podem ocorrer por ações rotineiras como: a circulação de pessoas, movimentação de objetos e inserção de obstáculos (PALEOLOGU, 2015) (BREINING et al., 1999).

Na figura 2.9 se apresenta uma estrutura em blocos onde se destaca as flutuações no ambiente, representadas por  $q(n)$ . Estas flutuações são assumidas como um ruído Gaussiano de média zero, independentes dos demais sinais do sistema. A presença dessas oscilações altera a resposta do sistema (resposta ao impulso), a qual caracteriza sua variação temporal, representada no diagrama pelo vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$ .

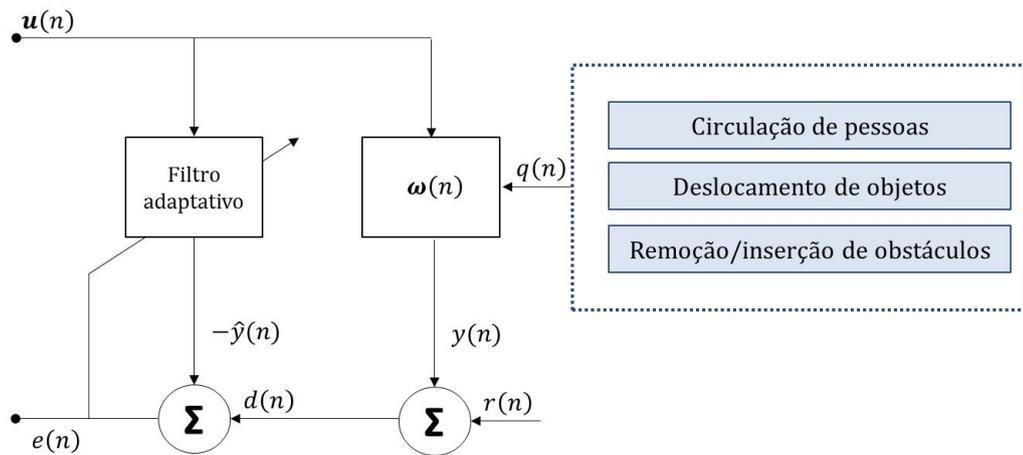


Figura 2.9 – Não estacionariedade em ambientes acústicos.

Dessa forma, pode-se colocar o problema do cancelamento do eco acústico não estacionário numa perspectiva de um problema de estimação, onde minimizar o erro  $e(n)$  significa que o sistema adaptativo deve acompanhar as variações do vetor  $\mathbf{w}(n)$ , isto é,

$$\begin{aligned}
 e(n) &= d(n) - \mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n) \\
 &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) + r(n) - \mathbf{u}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n) \\
 &= \mathbf{u}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n) + r(n)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde o vetor  $\tilde{\mathbf{v}}(n)$  deve tender a zero no processo de cancelamento. Vale ressaltar que, nesse caso, assume-se uma entrada comum  $\mathbf{u}(n)$  ao sistema. Entretanto, essa condição nem sempre está presente em inúmeros casos práticos.

Nesse capítulo destacamos como a existência de não linearidades e variações no tempo em um sistema acústico torna o problema de cancelamento do eco um problema de estimação bastante difícil. Assim, no próximo capítulo serão discutidas estratégias de estimação clássicas considerando o problema da não linearidade e da variância no tempo

### 3 ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES E VARIANTES NO TEMPO

Neste capítulo são abordadas técnicas de estimação considerando o cenário de sistemas não lineares e variantes no tempo. Dentro desta discussão são destacados aspectos característicos desse cenário com o objetivo de definir de forma clara a dificuldade do problema proposto.

Na figura 3.1 é mostrado um diagrama de blocos que representa um sistema não linear que pode servir como base para a análise do caminho percorrido pelo eco acústico. O sistema é caracterizado por uma função não linear  $\varphi(\cdot)$ , em que  $u(n) \in \mathbb{R}^q$  é a entrada do sistema no instante  $n$  e  $y(n) \in \mathbb{R}$  representa a saída. O sinal  $r(n)$  é um ruído branco aditivo, com distribuição Gaussiano e de média zero. O sinal  $d(n)$  representa o sinal observado do sistema (sinal desejado).

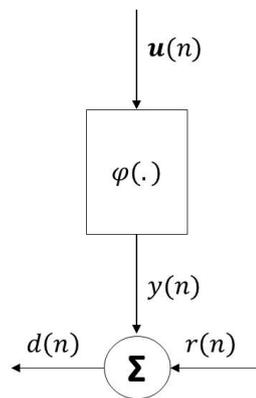


Figura 3.1 – Representação de um sistema não linear.

O objetivo é estimar  $y(n)$  a partir de um conjunto de observações  $d(n)$ , cuja equação é definida por:

$$d(n) = y(n) + r(n) \quad (3.1)$$

A partir de  $d(n)$ , diversas técnicas de estimação são propostas na literatura para estimação de  $y(n)$ . Nesse processo, podem ser levadas em consideração várias características dos mais diversos sistemas (KAY, 1993).

Baseado nisso, extrapola-se o exemplo dado na figura 3.1, considerando então que, o sistema a ser estimado além de não linear podem ser não estacionários. Dessa forma, na figura 3.2 se apresenta uma estrutura em blocos considerando também a variação no tempo da resposta impulsiva do sistema.

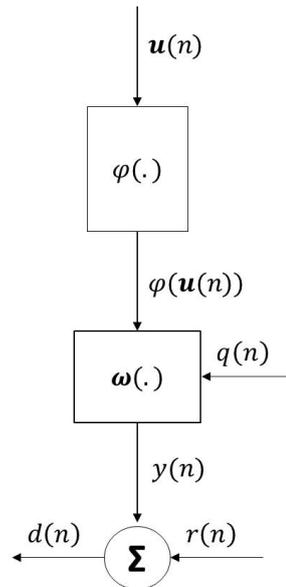


Figura 3.2 – Sistema não linear e variante no tempo.

Com isso, a estimação de  $y(n)$  se torna mais complexa, tornando necessária a aplicação de técnicas que atuem de forma conjugada na estimação do sistema proposto, cobrindo tanto a questão da não linearidade quanto da variação na resposta do sistema no tempo.

### 3.1 Teoria de Estimação - Uma breve revisão

A estimação pode ser definida como um processo de atribuição de um valor a um determinado parâmetro, do qual não se conhece o seu valor absoluto.

Observando a figura 3.3.

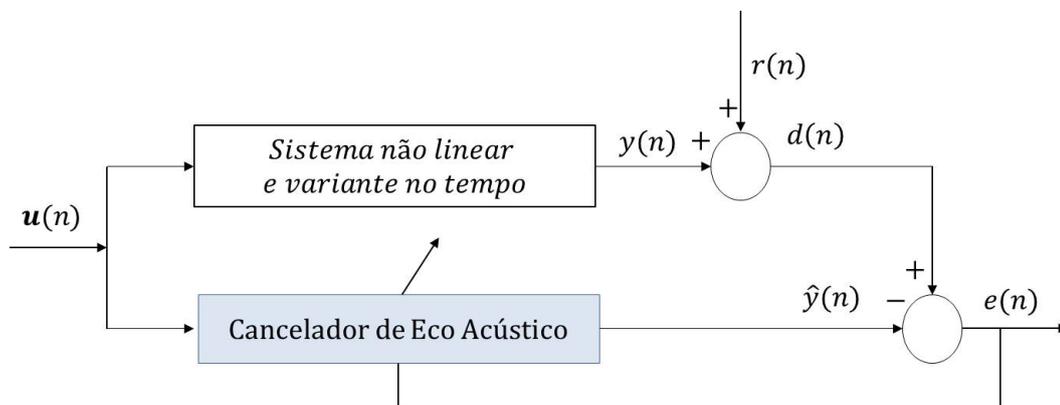


Figura 3.3 – Cancelador de Eco Acústico.

Matematicamente, busca-se, através do estimador, uma solução ótima a partir de um conjunto de  $n$  observações, representadas por  $\alpha_n(d(1), d(2), \dots, d(n))$ , em que  $\alpha_n$  representa uma função que relaciona as amostras observadas. De forma que,

$$E \{ \hat{y}(n) \} = y(n) \quad (3.2)$$

Considerando que o erro de estimação é definido por  $\tilde{y}(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ .

Dessa forma, a solução ótima que se busca será dada por

$$E \{ \tilde{y}(n) \} = 0 \quad (3.3)$$

### 3.2 Estimadores recursivos

Nesta seção são relacionados alguns dos estimadores mais conhecidos na área científica, cuja teoria e formulação é apresentada em (KAY, 1993) e (E. W. Kamen; J. K. Su., 1999).

- Estimador *Maximum Likelihood* (ML) ou Máxima Verossimilhança - Se baseia na estimação de parâmetros de um determinado modelo estatístico. No caso do cancelador de eco acústico, a estimação é dada a partir da Função de Distribuição de Probabilidade, do inglês *Probability Distribution Function*, (PDF) de  $\mathbf{y}(n)$  representada pela função de verossimilhança  $f_y(y|\mathbf{u})$ , onde  $\mathbf{u}$  é considerada a variável observada e  $y$  o parâmetro a ser estimado. O objetivo do estimador ML é maximizar  $f_y(y|\mathbf{u} = u)$ , para um valor fixo de amostras de entrada, neste caso  $\mathbf{u}$ , considerando que o valor estimado que mais se aproxima do real é aquele dado pelo ponto de máximo da PDF (KAY, 1993).
- Estimador *Maximum à Posteriori* (MAP) ou Máximo à Posteriori - Baseado em estimação Bayesiana, considera-se como exemplo o caso do cancelador de eco. O estimador MAP busca encontrar um valor para  $\hat{y}$  que maximize a distribuição *a posteriori*  $f_u(u|\mathbf{y} = y)f_y$ , que é a função de máxima verossimilhança  $f_u(u|\mathbf{y} = y)$ , também conhecida como Densidade *a Posteriori*, disponível após a observação  $y(n)$  tiver ocorrido, multiplicada pela função de distribuição *a priori*, ou seja, uma distribuição hipotética de probabilidade de valores de  $\mathbf{y}$  considerando  $n$  variáveis aleatórias da entrada  $\mathbf{u}$ .

Com o conhecimento da função Densidade *a Posteriori*, os parâmetros serão restringidos a um conjunto reduzido de valores, obtendo-se, assim, uma ideia de sua distribuição, que pode ser incorporada no processo de cálculo, tornando o estimador mais eficiente quando

comparado ao ML.

- Estimador *Minimum Mean Square Error* (MMSE) ou Mínimo Erro Médio Quadrático - Ainda considerando o caso do cancelador de eco, através do MMSE busca-se obter um estimador próximo ao ótimo, na qual sua saída  $\hat{y}(n)$  seja tão próxima, quanto possível, do sinal a ser estimado, no caso  $\mathbf{y}(n)$ . O estimador MMSE tem como objetivo definir, de forma recursiva, a partir de um conjunto de  $n$  observações  $\mathbf{d}(n)$ , um valor para  $\hat{y}(n)$ , de modo que o Erro Médio Quadrático, do inglês *Mean Square Error* (MSE), definido por

$$EMQ = E \{ (y - \hat{y})^2 \} \quad (3.4)$$

seja o menor possível.

Assim, o valor de  $\hat{y}_{MMSE}$  é dado por

$$\hat{y}_{MMSE} = E \{ y|u \} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_y(y|u) \cdot dy \quad (3.5)$$

observa-se que assim como ocorre nos estimadores ML e MAP, o MMSE também requer o conhecimento prévio de funções probabilísticas, o que torna sua aplicação, assim como os demais, complexa computacionalmente, pela necessidade de armazenamento de um grande conjunto de amostras de entrada  $\mathbf{u}(n)$ , para determinação dessas funções.

- Estimador *Linear Minimum Mean Square Error* (LMMSE) ou Erro Médio Quadrático Mínimo Linear- Considerando as características dos estimadores ML, MAP e MMSE, citadas anteriormente, somado ao fato do MMSE ser considerado um estimador generalista, devido a sua forma (E. W. Kamen; J. K. Su; 1999), encontra-se no LMMSE uma quarta alternativa aplicável na estimação de parâmetros.

A técnica envolvida no LMMSE busca restringir o conjunto de valores estimados, representados por  $\hat{y}$ , através de uma função  $\alpha(\mathbf{u})$ . Com isso, o LMMSE não é considerado um estimador ótimo como o MMSE, mas poderá ser considerado ótimo dentro da classe de funções em que for aplicado, incluindo uma grande faixa de funções lineares importantes. A saída do estimador LMMSE é definida por

$$\hat{y} = \lambda \mathbf{u} \quad (3.6)$$

Dessa forma o problema passa a ser a determinação do parâmetro  $\lambda$ , que pode ser en-

contrado a partir da minimização do EMQ, conforme visto em (E. W. Kamen; J. K. Su;, 1999), e dado pela equação (3.7).

$$\lambda = \frac{E\{\mathbf{y}\mathbf{u}\}}{E\{\mathbf{u}^2\}} \quad (3.7)$$

Dessa forma, o estimador LMMSE fornece um  $\hat{y}_{LMMSE}$  dado por

$$\hat{y}_{LMMSE} = \alpha(\mathbf{u}) = \left( \frac{E\{\mathbf{y}\mathbf{u}\}}{E\{\mathbf{u}^2\}} \right) \mathbf{u} \quad (3.8)$$

Na aplicação do LMMSE não se faz necessário o conhecimento de funções de verossimilhança e densidades, bastando ter informação sobre a correlação entre os sinais  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$ , dado por  $E\{\mathbf{y}\mathbf{u}\}$  e o momento de segunda ordem de  $\mathbf{u}$ , ou seja,  $E\{\mathbf{u}^2\}$ .

Do mesmo modo que os estimadores apresentados sejam destacados na área acadêmica e científica, estes contêm alguns aspectos que os descarta como alternativa, como no caso da estimação *online* e os canceladores de eco acústico, por exemplo:

- Estimadores ML e MAP: requerem o conhecimento das funções densidade de probabilidade  $f_y(y|\mathbf{u})$  e  $f_u(u|\mathbf{y} = y)f_y$ , além do conhecimento prévio das medições  $y(n)$  já ocorridas;
- MMSE: requer conhecimento prévio das observações, dadas por  $y(n)$ , já ocorridas, além do conhecimento da função densidade probabilística, que pode requerer um grande número de realizações para aproximação da solução ótima a que se propõe.
- LMMSE: A cada iteração (de 1 até  $n$ ), devem ser calculadas  $n$  equações lineares, como visto em (??).

Assim como já foi comentado, essas características requerem uma memória computacional suficientemente grande para armazenar as observações passadas, na realização de uma estimativa, além do armazenamento dos coeficientes do estimador, caso específico do LMMSE.

Com isso, buscam-se alternativas, no que se refere a técnicas de estimação, que sejam capazes de operar em um estado não estacionário, em modo contínuo, sem que haja necessidade de armazenamento e processamento de uma quantidade massiva de dados. Uma opção é o filtro de Kalman.

### 3.3 Estimadores de sistemas não lineares

Na figura 3.4 é observado o diagrama de blocos que contém um algoritmo adaptativo, aplicado no cancelamento de eco acústico não linear. A não linearidade presente no caminho percorrido pelo eco acústico é modelada neste exemplo pela função  $\varphi(\cdot)$ , que serve como entrada da resposta ao impulso do canal, representado por  $w(n)$ .

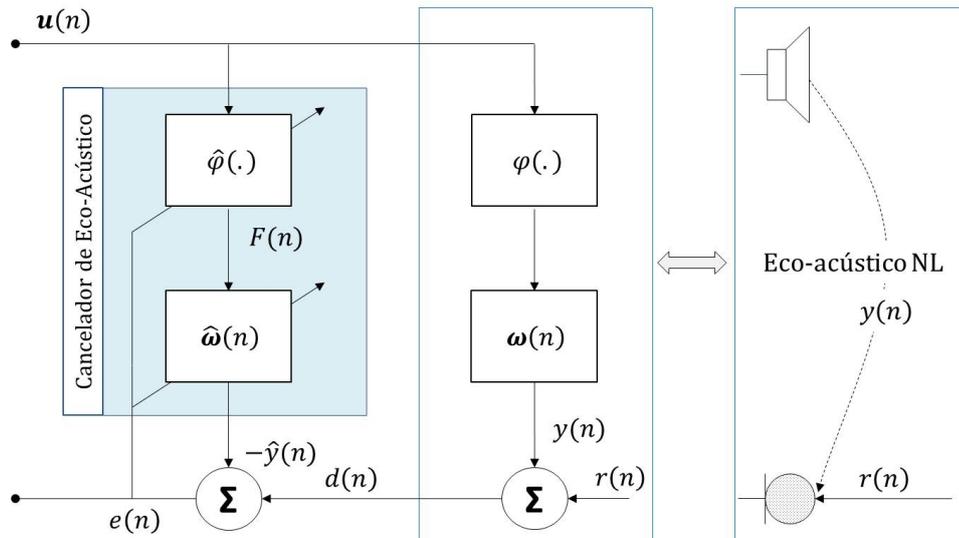


Figura 3.4 – Cancelador de eco acústico não linear - Exemplo.

Observa-se que o cancelador de eco acústico é formado por dois blocos adaptativos em série, sendo  $\hat{\varphi}(n)$  dedicado a estimação da não linearidade  $\varphi(\cdot)$  e  $\hat{w}(n)$ , cuja entrada  $F(n)$  é a saída do estimador  $\hat{\varphi}(\cdot)$ , busca identificar a resposta ao impulso  $w(n)$ .

A seguir são apresentadas algumas técnicas abordadas na literatura, para o cancelamento do eco acústico, considerando a não linearidade dos sistemas.

#### 3.3.1 Filtros polinomiais

Uma abordagem construtiva e versátil para o problema da estimação não linear é a utilização de uma estrutura de filtro baseada em polinômios, aplicado a variáveis discretas e causais, estimando a saída  $F(n)$ , a partir da equação (3.9).

$$\mathbf{F}(n) = \sum_{i=0}^P f_i(u(n), u(n-1), \dots, u(n-N), y(n-1), \dots, y(n-M)) \quad (3.9)$$

onde a função  $f_i(\cdot)$  é um polinômio de ordem  $i$  com variáveis  $u(n), u(n-1), \dots, u(n-N), y(n-1), \dots, y(n-M)$ .

Essa definição inclui os filtros lineares quando  $f_i(\cdot) = 0$  para todo  $i \neq 1$ .

Dentre as vantagens em utilizar filtros polinomiais em aplicações de filtragem adaptativa não linear, destacam-se (PARREIRA, 2012) (MATHEWS; SICURANZA, 2000):

- Os resultados obtidos a partir da análise e do projeto de filtros lineares podem ser utilizados em filtros polinomiais, pelo simples fato de que estes tratam de uma extensão dos filtros lineares;
- É possível mostrar que, utilizando um número finito de coeficientes, os sistemas polinomiais são capazes de representar uma classe relativamente grande de sistemas não lineares.

Em contrapartida, dentre as desvantagens do uso de filtros polinomiais, citam-se (PARREIRA, 2012) (MATHEWS; SICURANZA, 2000):

- O número de coeficientes para estimação de sistemas não lineares, a partir de aplicações práticas, é relativamente alto;
- A complexidade da análise e processamento de dados aumenta de acordo com a ordem do polinômio, de forma que o filtro polinomial não seja recomendado para aplicações *online*, que requer respostas rápidas.

### 3.3.2 Filtro baseado em séries de Volterra

Os filtros adaptativos de Volterra são apresentados como uma estratégia para estimação, seja o sistema linear ou não (AZPICUETA-RUIZ et al., 2011), podendo ser representado por uma estrutura de blocos em paralelo, exemplificada na figura 3.5, onde cada bloco  $\hat{\mathbf{w}}_i(n)$  corresponde a um filtro individual.

Assim, pode-se considerar que um Filtro de Volterra de ordem 'P' é formado por um bloco estimador de primeira ordem (linear), seguido por outros  $P - 1$  blocos não lineares.

A equação fundamental do filtro de Volterra é dada por

$$\mathbf{F}(n) = \mathbf{u}_P(n)\hat{\mathbf{w}}_P^T(n) \quad (3.10)$$

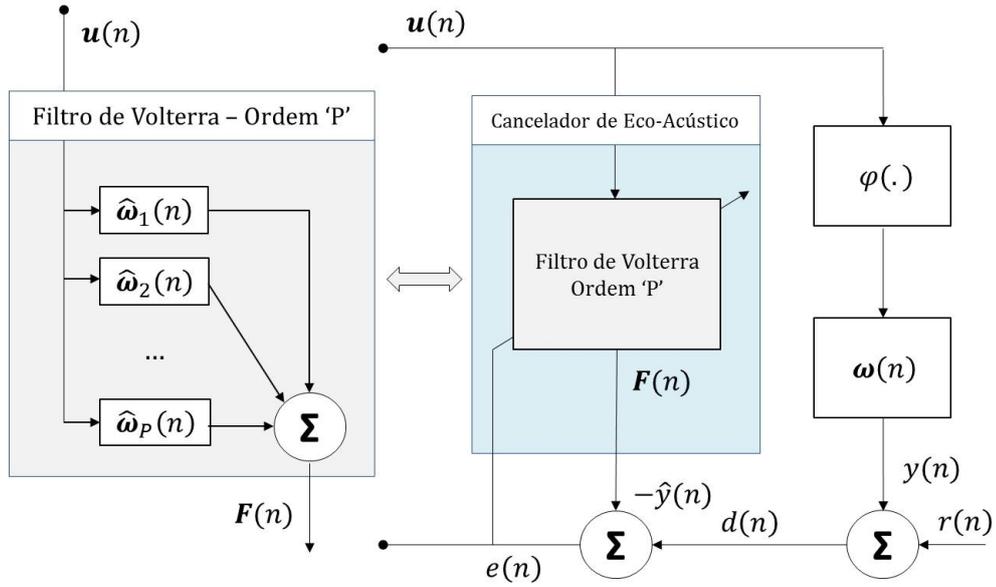


Figura 3.5 – Filtro de Volterra aplicado no cancelamento de eco acústico.

onde  $\mathbf{u}_P(n)$  e  $\mathbf{F}(n)$  caracterizam os sinais de entrada e saída, respectivamente. Tanto  $\mathbf{u}_P(n)$  quanto  $\hat{\mathbf{w}}_P(n)$  se tratam de vetores com largura dada pela ordem  $P$  do filtro (BATISTA et al., 2004).

Considerando  $\hat{y}(n)$  como a saída de um cancelador de eco acústico, construído a partir do Filtro de Volterra, temos a relação dada por

$$\mathbf{F}(n) = \hat{y}(n) \quad (3.11)$$

Expandido a equação (3.10) para o caso de um Filtro Volterra causal, aplicando (3.11), obtém-se a equação (3.12) que descreve o comportamento do cancelador de eco na figura 3.5

$$\hat{y}(n) = \sum_{m_1=0}^N \hat{\mathbf{w}}_1(m_1) \mathbf{u}(n-m_1) + \sum_{m_1=0}^N \sum_{m_p=m_p-1}^N \hat{\mathbf{w}}_p(m_1, \dots, m_p) \mathbf{u}(n-m_1) \dots \mathbf{u}(n-m_p) \quad (3.12)$$

Uma propriedade importante dos filtros de Volterra é a relação linear entre a saída,  $\mathbf{F}(n)$ , e o *kernel* de Volterra  $(m_1, m_2, \dots, m_p)$  (MILLER; VILDAVSKI; NORCIA, 2008), que permite a aplicação direta de algoritmos adaptativos, como por exemplo o LMS, NLMS e RLS (TAN; JIANG, 2001), (CONTAN et al., 2010).

A grande desvantagem dos filtros de Volterra é a complexidade computacional necessária para sua implementação, pois, conforme o tamanho da memória do filtro, maior será o número de coeficientes envolvidos, restringindo sua aplicação em sistema cujo processamento exija maior velocidade.

Em (FU; ZHU, 2008) (BATISTA et al., 2004) e (STENGER; RABENSTEIN, 1999) é possível observar aplicações dos filtros adaptativos de Volterra, de segunda e terceira ordem, aplicados no cancelamento de eco acústico não linear.

### 3.3.3 Técnicas baseadas em transformações não lineares (transformação sigmoideal)

Vários trabalhos propostos, como (BERSHAD et al., 1999) (FU; ZHU, 2008) (BUDURA; BOTOCA, 2005) abordam o problema do eco acústico assumindo um problema de identificação linear, embora conhecendo a incapacidade desses sistemas de eliminar as componentes não lineares.

Contudo, estes trabalhos propõe o uso de canceladores de eco acústico compostos por mais de um bloco adaptativo, dispostos em séries, onde um bloco é aplicado na estimação de parâmetros de uma função não linear  $\varphi(\cdot)$ , presente no caminho percorrido pelo eco, e o outro, na estimação da resposta ao impulso do canal. Esses sistemas são assim definidos como estimadores paramétricos.

Na figura 3.6 se observa o diagrama de blocos do cancelador de eco acústico proposto por (FU; ZHU, 2008).

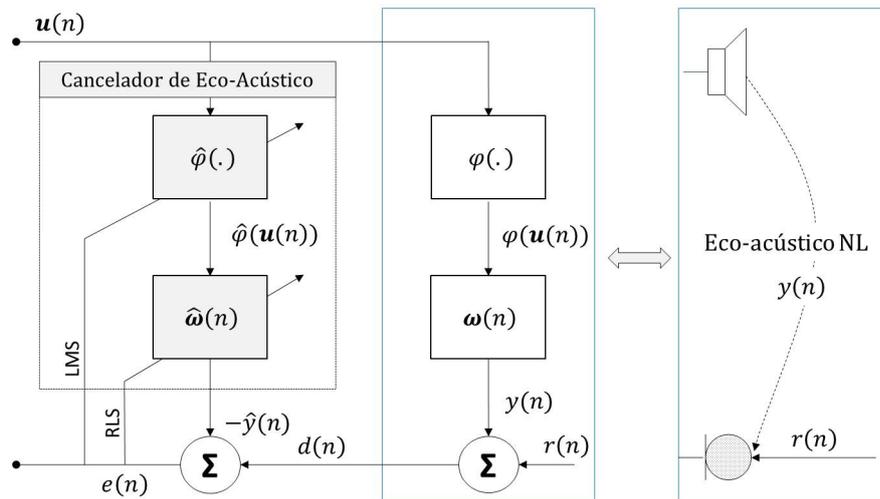


Figura 3.6 – Cancelador Eco Acústico não linear proposto em (FU; ZHU, 2008).

A estrutura proposta considera como conhecida a não linearidade presente no canal, podendo ser modelada a partir de uma função sigmoideal bi-parametrizável, dada pela equação

$$\varphi(\mathbf{u}(n)) = \frac{2\beta}{1 + e^{(-\alpha\mathbf{u}(n))}} - \beta \quad (3.13)$$

onde o parâmetro  $\alpha$  determina a velocidade de subida da rampa e o parâmetro  $\beta$  a amplitude, ou ainda, o corte da saturação.

A função sigmoidal é definida como uma função estritamente crescente, exibindo um fator de alisamento e propriedades assintóticas. Esta função pode cobrir com precisão uma grande variedade de distorções não lineares como, por exemplo, a curva de saturação gerada pela dinâmica de um amplificador, a partir da escolha de diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

O cancelador proposto é formado por um estimador da não linearidade, criado em torno de um filtro LMS duplo, que busca estimar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da equação (3.13), individualmente, a partir de uma entrada  $u(n)$  e um estimador da resposta ao impulso do canal acústico, criado em torno de um algoritmo adaptativo RLS. O cenário apresentado considera o ambiente estacionário.

Na figura 3.7 é visto que, a partir da equação (3.13), mantendo fixo  $\beta$ , e variando o valor de  $\alpha$ , há uma mudança na velocidade de subida da rampa da sigmóide, de forma que, quanto menor for  $\alpha$ , mais lenta será a subida.

Na figura 3.8 observa-se que, mantendo  $\alpha$  fixo, e variando o valor de  $\beta$ , o valor da amplitude da sigmoide é alterado.

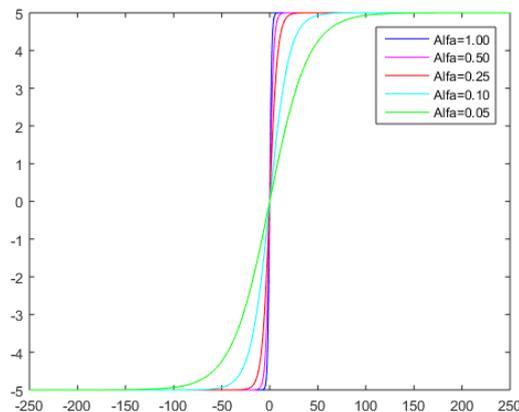


Figura 3.7 – Representação de uma função sigmoidal  $\varphi(n)$  para  $\beta = 5$ .

Através dos resultados apresentados em (FU; ZHU, 2008), é possível observar que em um ambiente cuja não linearidade é conhecida, e o estado é invariante no tempo, a saída  $\hat{y}(n)$  do cancelador de eco acústico converge para  $y(n)$  assim como os valores de  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  convergem para os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

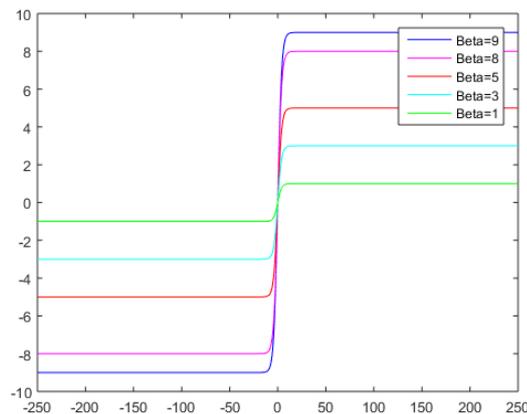


Figura 3.8 – Representação de uma função sigmoideal  $\varphi(n)$  para  $\alpha = 0,5$ .

Um fator relevante para o fomento de novas técnicas é que, em muitas abordagens, como esta proposta por (FU; ZHU, 2008), a não linearidade é estabelecida a partir de um modelo paramétrico conhecido, deixando uma lacuna aberta para o desenvolvimento de técnicas aplicáveis no cancelamento do eco acústico a partir da estimação de sistemas cuja a não linearidade é desconhecida, e o estado não estacionário.

### 3.3.4 Filtro de Kalman Estendido

O filtro de Kalman, apesar de ser apresentado como uma eficiente solução para sistemas variantes no tempo se torna limitado aos casos em que os modelos de estado e medição de um determinado sistema são lineares, deixando de ser aproveitado em situações como o deslocamento de um determinado objeto, que pode se mover em um ambiente com uma velocidade constante (CRUZ, 2013), e cuja as equações de estado e medição são não lineares (KAY, 1993).

Buscando explorar a teoria de filtragem de Kalman em sistemas não lineares, foram propostas modificações e em suas equações originais, obtendo o Filtro de Kalman Estendido ou *Extended Kalman Filter* (EKF), cuja intenção, portanto, é contornar a limitação do conjunto de aplicações do filtro de Kalman original, através da linearização das equações de estado e medição, gerando um algoritmo aplicável na estimação de sistemas não lineares (E. W. Kamen; J. K. Su., 1999).

O EKF é utilizado quando o modelo de equações de estado e observação de um sistema físico apresenta característica não linear. Após a linearização das equações através de expansão por séries de *Taylor* e as matrizes *Jacobianas* (KAY, 1993), obtém-se um modelo aproximado

do processo, dado por

$$\mathbf{w}(n+1) = \phi(\hat{\mathbf{w}}(n)) + \mathbf{J}_\phi(\hat{\mathbf{w}}(n))[\mathbf{w}(n) - \hat{\mathbf{w}}(n)] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{w}(n) \quad (3.14)$$

$$d(n) = \gamma(\hat{\mathbf{w}}^-(n)) + \mathbf{J}_\gamma(\hat{\mathbf{w}}^-(n))[\mathbf{w}(n) - \hat{\mathbf{w}}^-(n)] + \mathbf{v}(n) \quad (3.15)$$

Assim como no Filtro de Kalman original, as equações recursivas do EKF são divididas em dois grupos: atualização, ou predição, calculadas antes da realização da medida  $d(n)$ , dado pelas equações (3.16) e (3.17), e medição, após a realização de  $d(n)$ , dado pelas equações (3.18) até (3.20).

$$\hat{\mathbf{w}}^-(n) = \phi(\hat{\mathbf{w}}(n-1)) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P}^-(n) = \mathbf{J}_\phi(\hat{\mathbf{w}}(n-1))\mathbf{P}(n-1)\mathbf{J}_\phi^T(\hat{\mathbf{w}}(n-1)) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}(n-1)\mathbf{\Gamma}^T \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = \hat{\mathbf{w}}^-(n) + \mathbf{K}(n)[d(n) - \gamma(\hat{\mathbf{w}}^-(n))] \quad (3.18)$$

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}^-(n)\mathbf{J}_\gamma^T(\hat{\mathbf{w}}^-(n))[\mathbf{J}_\gamma(\hat{\mathbf{w}}^-(n))\mathbf{P}^-(n)\mathbf{J}_\gamma^T(\hat{\mathbf{w}}^-(n)) + \mathbf{R}(n)]^{-1} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^-(n) - \mathbf{K}(n)\mathbf{J}_\gamma(\hat{\mathbf{w}}^-(n))\mathbf{P}^-(n) \quad (3.20)$$

Os parâmetros e variáveis descritos nas equações estão descritos na tabela 3.1.

O EKF se trata de um algoritmo bastante utilizado em diversas aplicações. Entretanto, o uso desta técnica pode resultar em alguns problemas ou resultados indesejáveis, em virtude de aproximações inerentes em sua derivação, originadas a partir de expansão por série Taylor de primeira ordem.

Além de não ser um estimador ótimo, se a estimação de seu estado inicial for incorreta, o filtro poderá divergir rapidamente.

Cabe observar que sendo  $\phi$  e  $\gamma$  funções lineares, o EKF será tratado como um filtro de Kalman regular.

Tabela 3.1 – Parâmetros do EKF.

<i>Símbolo</i>	<i>Descrição</i>
$\hat{\mathbf{w}}^-(n)$	Estado estimado <i>a priori</i>
$\hat{\mathbf{w}}(n)$	Correção do modelo de Estado
$d(n)$	Medição ou Observação
$\mathbf{P}(n)$	Matriz de covariância do erro
$\mathbf{P}^-(n)$	Matriz de covariância do erro <i>a priori</i>
$\mathbf{K}(n)$	Ganho do EKF
$\mathbf{Q}(n)$	Matriz de covariância das flutuações do Estado
$\mathbf{R}(n)$	Matriz de covariância do ruído de Medição
$\phi$	Função não-linear do estado
$\gamma$	Função não-linear da medição
$\mathbf{J}_\phi$	Jacobiana do Estado
$\mathbf{J}_\gamma$	Jacobiana da Medição
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz de observação relacionada a flutuação do Estado
$n$	Tempo ou Estado

### 3.3.5 Filtro de Kalman Unscented

Proposto por (JULIER; UHLMANN, 2004) o filtro de Kalman *Unscented*, do inglês *Unscented Kalman Filter* (UKF) busca reverter os erros que são inerentes do modelo proposto no EKF, surgidos devido às linearizações realizadas para o cálculo da média e da covariância da variável de estado não linear.

Esse algoritmo permite que se estimem os estados em sistemas não lineares sem aplicação de qualquer tipo de linearização às funções não lineares presentes no modelo. Isso se deve a uma técnica de transformação, chamada Transformação *Unscented* que gera um conjunto de vetores que, depois de submetidos à transformação não linear, mantêm as mesmas características estatísticas (média e covariância).

Dentre as vantagens do UFK em relação ao EKF, destacam-se (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2013):

- O erro de estimação é menor do que o esperado quando aplicado o EKF;
- O UKF pode ser aplicado a funções não diferenciáveis;
- Descarta a derivação de matrizes Jacobianas e, com isso, reduz boa parte da complexidade computacional intrínseca ao EKF;
- O filtro é válido para expansões de ordem superior a 2, um grau de aplicação padrão do EKF.

Embora com o filtro de Kalman Unscented tenha sido possível obter ótimos resultados

em (JULIER; UHLMANN, 2004), alguns problemas foram verificados durante sua execução como, por exemplo, a alta sensibilidade a inicialização da matriz de covariância  $\mathbf{P}$ , de forma que a escolha inadequada dessa matriz de inicialização poderá levar o algoritmo a uma divergência.

Nesse capítulo foram mostrados alguns métodos para estimação de canais não lineares. Como se pôde observar, a maioria deles é baseada em modelos paramétricos para as não linearidades desconhecidas. Em virtude da limitação dos modelos paramétricos de não conhecer a não linearidade, métodos não paramétricos têm sido propostos para permitir maior flexibilidade na identificação da não linearidade. Os filtros adaptativos de Volterra como visto nesse capítulo, é um bom exemplo, e diferentes abordagens tem sido propostas para o cancelamento do eco não linear baseado em Volterra como em (AZPICUETA-RUIZ et al., 2011) e em suas referências.

Como visto, embora os filtros de Volterra possam proporcionar maior flexibilidade, sua natureza polinomial tende a levar os custos da implementação a um crescimento exponencial com a ordem da não linearidade a ser estimada. Tais soluções têm sido frequentemente limitadas a não linearidades de segunda ordem para aplicações práticas.

Visto as dificuldades encontradas, e aos bons resultados provenientes das soluções não paramétricas, mesmo com suas limitações de ordem, uma solução que permite aliviar o fardo da complexidade de filtros polinomiais é a abordagem baseada em *kernels*, isto é, na utilização do Espaço de Hilbert de Kernel Reprodutivo (RKHS) (tradução do inglês *Reproducing Kernel Hilbert Space*) através do *kernel* de Mercer. No próximo capítulo será apresentado o embasamento teórico sobre o RKHS que irá permitir o desenvolvimento do algoritmo de filtragem, proposto nesse trabalho.

#### 4 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA FILTRAGEM ÓTIMA NÃO LINEAR NO ESPAÇO DE HILBERT DEFINIDO POR KERNEL REPRODUTIVO - RKHS

Ao longo das últimas décadas, o uso de métodos baseados no espaço de Hilbert definido por *kernels* reprodutivos (RKHS) na estimação de sistemas não lineares, vem ganhando popularidade junto a comunidade científica (WAHBA, 1998) (DUTTWEILER; KAILATH, 1973), de forma que vários filtros adaptativos baseados em *kernel* têm sido recentemente propostos para estimação de canais não lineares.

O algoritmo mais popular dessa família de filtros é o algoritmo LMS *kernelizado* (KLMS) (LIU; POKHAREL; PRINCIPE, 2007), (PARREIRA, 2012). Outras versões baseadas em *kernel* como os bem conhecidos algoritmos NLMS (*Normalized LMS*), RLS e o algoritmo de projeções afins (*Affine projection - AP*) tem também sido propostas para estimação não linear *online* (ENGEL; MANNOR; MEIR, 2004), (RICHARD; BERMUDEZ; HONEINE, 2009).

Na figura 4.1 é ilustrado o mapeamento de sinais para um espaço característico, definido como RKHS, isto é,  $x_1, \dots, x_n \mapsto \phi(x_1), \dots, \phi(x_n)$ . Um RKHS é um espaço completo formado por produtos internos definidos por um *kernel* Reprodutivo de Mercer (ARONSZAJN, 1950). Vale ressaltar que existem vários tipos de funções *kernels*, e cada uma delas apresentam seus parâmetros específicos associados a um conjunto definido de valores. Nesse espaço característico, esses produtos internos podem ser calculados eficientemente sem a necessidade de determinar as características vetoriais.

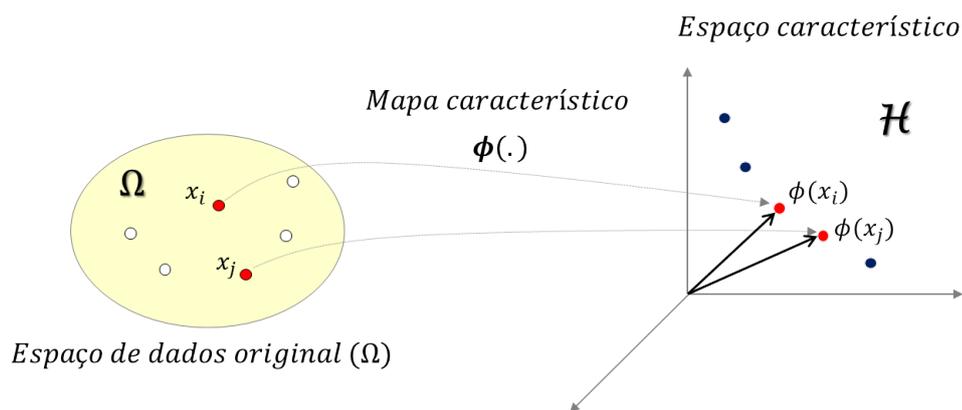


Figura 4.1 – Mapeamento no espaço característico.

Considerando que  $\mathcal{H}$  define o espaço de Hilbert de funções reais  $\phi(\cdot)$  em um conjunto compacto  $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  será o produto interno em  $\mathcal{H}$ . Para isso, assume-se que a evolução de uma função  $\Gamma_x$  definida por  $\Gamma_x[\phi] \triangleq \phi(x)$  é linear com relação a  $\phi(\cdot)$  e limitada, para todo  $x$  em  $\Omega$ .

Considerando o teorema da representação de Riez, existe uma única função definida positiva  $x \mapsto k(x_i, x_j)$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , definida por  $k(\cdot, x_i)$  denominada *representante da evolução* em  $x_j$ , que satisfaz (ARONSZAJN, 1950)

$$\phi(x_j) = \langle \phi(\cdot), k(\cdot, x_j) \rangle_{\mathcal{H}}, \forall \phi \in \mathcal{H} \quad (4.1)$$

para qualquer valor fixado de  $x_j \in \Omega$ . A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (ARONSZAJN, 1950).

Substituindo  $\phi(\cdot)$  por  $k(\cdot, x_i)$  na expressão (4.1), resulta-se em

$$k(x_i, x_j) = \langle k(\cdot, x_i), k(\cdot, x_j) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (4.2)$$

para todo  $x_i, x_j \in \Omega$ .

A equação (4.2) dá origem ao termo *Kernel reprodutivo*, referido por  $k(\cdot, \cdot)$ .

Denotado por  $\phi(\cdot)$  o mapa que atribui para cada entrada  $x$  a função Kernel  $k(\cdot, x)$ , a equação (4.2) implica que

$$k(x_i, x_j) = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (4.3)$$

O *kernel*, dessa maneira, avalia o produto interno de qualquer par de elementos de  $\Omega$  mapeado em  $\mathcal{H}$ , sem qualquer conhecimento explícito de cada  $\phi(\cdot)$  ou  $\mathcal{H}$ . Esta ideia chave é conhecida como o Truque do Kernel (*Kernel Trick*).

São exemplos clássicos de funções de *kernels*:

- *Kernel* Gaussiano ou função *Kernel* de base radial gaussiana:

$$k(x(i), x(j)) = \exp\left(\frac{-\|x(i) - x(j)\|^2}{2\xi^2}\right) \quad (4.4)$$

onde  $x(i), x(j) \in \mathbb{R}^q$  e  $\xi > 0$ .

- *Kernel* Laplaciano ou função *Kernel* de base radial laplaciana:

$$k(x(i), x(j)) = \exp\left(\frac{-\|x(i) - x(j)\|^2}{\xi}\right) \quad (4.5)$$

onde  $x(i), x(j) \in \mathbb{R}^q$  e  $\xi > 0$ .

- *Kernel* polinomial ou *Kernel* polinomial de  $\beta$ -ésimo grau, dado por:

$$k(x(i), x(j)) = (\alpha + \mathbf{x}(i)^T \mathbf{x}(j))^\beta \quad (4.6)$$

onde  $x(i), x(j) \in \mathbb{R}^q$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^*$  e  $\alpha \geq 0$ .

O diagrama de blocos de um sistema adaptativo baseado em *Kernel*, para o problema de identificação, é mostrado na figura 4.2, onde  $r(n)$  é um ruído de média zero e independente de qualquer outro sinal.

Nesse diagrama é assumida, além da não linearidade (no contexto definido para o problema do cancelamento), também a não estacionariedade do processo. Esta hipótese representa uma contribuição importante desse trabalho, já que, a maioria dos trabalhos apresentados na literatura assume um problema de estimação não linear, mas invariante no tempo. Enquanto que o problema em questão, como não linear e variante no tempo, tem sido pouco apresentado na literatura quando se discutem métodos baseados em *kernel*.

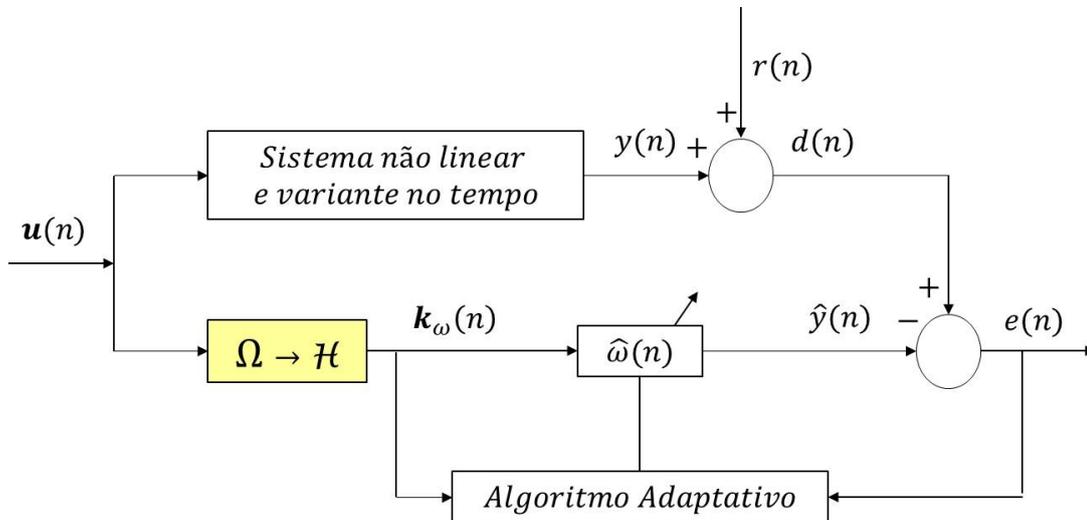


Figura 4.2 – Sistema de identificação adaptativo baseado em *kernel*.

Considerando uma abordagem dos mínimos quadrados, busca-se encontrar uma função  $\phi(\cdot)$  no RKHS que minimiza a soma de  $n$  erros quadráticos  $|d(i) - \phi(\mathbf{u}(i))|^2$  para todo  $i = 0, \dots, n$ .

Matematicamente, busca-se uma função  $\phi(\cdot)$  que resolva o problema de otimização

$$\phi(\cdot) = \min_{\phi \in \mathcal{H}} \sum_{i=1}^n |d(i) - \phi(\mathbf{u}(i))|^2 \quad (4.7)$$

O Teorema da Representação (KIMELDORF; WAHBA, 1971) estabelece que: dados  $n$  vetores de entrada  $\mathbf{u}(i)$  e observações  $d(i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ , a função  $\phi(\cdot) \in \mathcal{H}$  que minimiza o erro de estimação quadrático dada por

$$\sum_{i=1}^n |d(i) - \phi(\mathbf{u}(i))|^2 \quad (4.8)$$

pode ser escrita como uma expansão de *kernel* em termos de valores calculados como (KIMELDORF; WAHBA, 1971)

$$\phi(\cdot) = \sum_{j=1}^n w_j k(\cdot, \mathbf{u}(j)) \quad (4.9)$$

onde  $k(\cdot, \mathbf{u}(j))$ , representada por  $k(\mathbf{u}(l), \mathbf{u}(p))$  é o valor da função do *kernel* aplicada a um par de vetores  $\mathbf{u}(l)$  e  $\mathbf{u}(p)$  no RKHS e  $w_j$  representam os coeficientes do estado a ser estimado.

#### 4.1 Modelamento em tempo real - Online

O problema em utilizar (4.9) em aplicações *online* é o fato de que este modelo tem um número de termos que é igual ao número de  $n$  vetores de entrada.

Dessa forma, para aplicações *online* é preciso aproximar (4.9) através de um modelo de ordem finita, a partir de um número finito de observações dados por

$$\hat{\phi}(\cdot) = \sum_{j=1}^N w_j k(\cdot, \mathbf{u}_{w_j}) \quad (4.10)$$

A partir de (4.10), obtém-se um problema de ordem finita  $N$ , sendo necessário selecionar dentre os valores de entrada  $\mathbf{u}_{w_j}$  um subconjunto de  $N$  vetores, utilizando regra de esparsificação (RICHARD; BERMUDEZ; HONEINE, 2009), formando, então, um Dicionário ( $\mathcal{D}$ ) de funções *kernel* para utilização no modelo.

Em (PARREIRA, 2012) define-se dicionário um conjunto  $\mathcal{D}$  de funções *kernel*  $k(\cdot, \mathbf{u}(\omega_j))$  dado por:

$$\mathcal{D} := \{k(\cdot, \mathbf{u}(\omega_1)), k(\cdot, \mathbf{u}(\omega_2)), k(\cdot, \mathbf{u}(\omega_3)), \dots, k(\cdot, \mathbf{u}(\omega_N))\}$$

De forma ideal, busca-se um dicionário de ordem  $N$  de modo que a estimação dada a partir do vetor de saída  $\mathbf{k}_\omega(n)$  seja uma boa aproximação da solução linear para o caso de ordem infinita.

Na figura 4.3 é observado o diagrama de blocos de um estimador de  $\hat{\phi}(\cdot)$ , no RKHS,

ordem  $N$ .

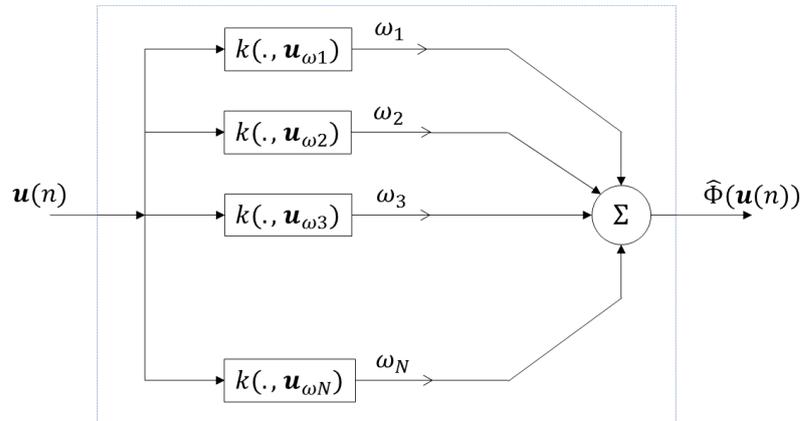


Figura 4.3 – Estimador de ordem finita no RKHS.

Numa abordagem ideal, busca-se um dicionário de ordem fixa dada por  $N$ , de forma que  $\hat{\phi}(\cdot)$  em (4.10) seja uma boa solução de (4.9).

Assim o problema da otimização passa a ser então

$$\min_{\phi \in \mathcal{H}} = \sum_{i=1}^N \left| d(i) - \hat{\phi}(\mathbf{u}(i)) \right|^2 \quad (4.11)$$

Observações:

- A construção do dicionário depende apenas do sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$ . Se este for estacionário, o dicionário será fixo;
- A construção do dicionário pode ser feita utilizando o critério de coerência, conforme explicado em (RICHARD; BERMUDEZ; HONEINE, 2009).

Como já comentado, em várias aplicações práticas o sinal  $y(n)$  na figura 4.2 é não estacionário. Isto implica que a solução ótima irá variar no tempo. Nesse caso, como também já mencionado, o filtro de Kalman no RKHS se torna um candidato em potencial para a solução de estimação não linear. Dessa forma, no próximo capítulo será apresentado o desenvolvimento do algoritmo de Kalman no RKHS.

## 5 O ALGORITMO DO FILTRO DE KALMAN KERNELIZADO - KKF

Neste capítulo será proposta uma nova formulação para o filtro de Kalman *Kernelizado* usando o mapeamento não linear dado em (4.10). Assume-se que o sinal de entrada é estacionário, porém o canal é não linear e variante no tempo. Assim, o filtro de Kalman Kernelizado aqui proposto tem seu vetor de estado composto pelos coeficientes do modelo (4.10). Consequentemente, isto pode ser explorado tanto na identificação de sistemas quanto na estimação de saída de um sistema autônomo.

### 5.1 Algoritmo KKF proposto

Na figura 5.1 é ilustrado o diagrama em blocos de um sistema adaptativo considerando os aspectos da não linearidade e variância no tempo presente no problema de cancelamento do eco acústico, foco da aplicação deste trabalho.

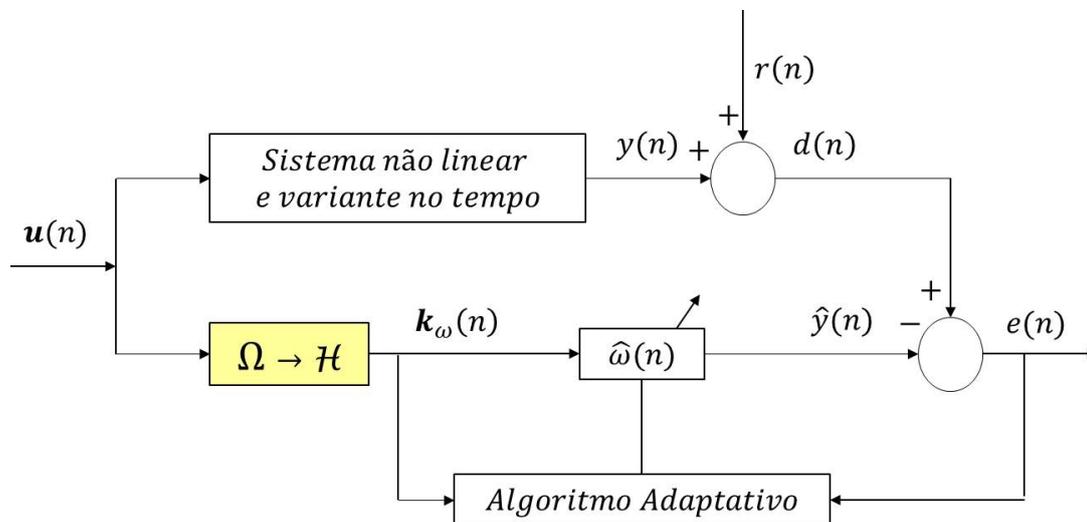


Figura 5.1 – Cancelamento do eco acústico não linear e variante no tempo.

Assumindo que a não linearidade do caminho percorrido pelo eco acústico pode ser representado, no RKHS, por  $y(n) = \phi(\mathbf{u}(n))$ , a observação  $d(n)$  é dada por

$$\begin{aligned} d(n) &= \phi(\mathbf{u}(n)) + r(n) \\ &= y(n) + r(n) \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $r(n)$  é um ruído branco Gaussiano, de média zero, que representa as incertezas no sinal observado  $d(n)$ . O vetor de entrada é dado por  $\mathbf{u}(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-N+1)]^T$ .

O vetor  $\mathbf{k}_w(n) = [k(u(n), u_{w1}), \dots, k(u(n), u_{wN})]^T$  é a entrada para o modelo (4.10) com vetor de coeficientes  $\hat{\mathbf{w}}(n) = [\hat{w}_1(n), \dots, \hat{w}_N(n)]^T$ , de forma que  $\hat{\phi}(\mathbf{u}(n)) = \mathbf{k}_w(n)\hat{\mathbf{w}}^T(n)$ , ou seja

$$\hat{y}(n) = \hat{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{k}_w(n) \quad (5.2)$$

O objetivo é aproximar uma função não linear de  $\mathbf{u}(n)$  por uma expansão no RKHS. Assim, definindo o modelo de observações como

$$d(n) = \sum_{i=1}^N w_i(n)k(\mathbf{u}(n), \mathbf{u}_{wi}) + r(n) \quad (5.3)$$

onde os coeficientes  $w_i(n)$  em (5.3), são não estacionários permitindo a modelagem da não linearidade variante no tempo. A equação de estado refletindo a dinâmica do ambiente é modelada pelo processo de primeira ordem de Gauss-Markov, dado por

$$\mathbf{w}_0(n) = \mathbf{A}\mathbf{w}_0(n-1) + \mathbf{q}(n) \quad (5.4)$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz ( $N \times N$ ) de parâmetros fixos e  $\mathbf{q}(n)$  é um ruído Gaussiano, de média zero  $N \times 1$  com matriz de correlação  $\mathbf{Q}(n) = E\{\mathbf{q}(n)\mathbf{q}^T(n)\}$ .

Os vetores  $\mathbf{u}_{wi}$  formam o dicionário de amostras que podem ser pré-selecionadas a partir de amostras de  $\mathbf{u}(n)$  utilizando regra de esparsificação, tal como o critério de coerência (RICHARD; BERMUDEZ; HONEINE, 2009) ou outro critério.

Para derivar o KKF, utiliza-se a notação típica Bayesiana, definindo  $v(n|n-k)$  como o valor de uma variável  $v$  no instante  $n$  dada as observações do sinal até um instante  $n-k$ .

Uma forma de observar o problema é sob o ponto de vista de uma interpretação geométrica. A figura 5.2 mostra essa interpretação referente ao problema da estimação linear e que pode ser usada para a derivação das equações (KAY, 1993).

É possível observar na figura 5.2 que  $\hat{\mathbf{w}}(n|n)$  pode ser calculado pela soma do seu valor prévio  $\hat{\mathbf{w}}(n|n-1)$  mais uma componente ortogonal as estimativas de saídas anteriores  $\hat{y}(n|n-1)$ , resultando em  $\Delta\hat{\mathbf{w}}(n|n)$  que representa as novas informações. Assim

$$\hat{\mathbf{w}}(n|n) = \hat{\mathbf{w}}(n|n-1) + \Delta\hat{\mathbf{w}}(n|n) \quad (5.5)$$

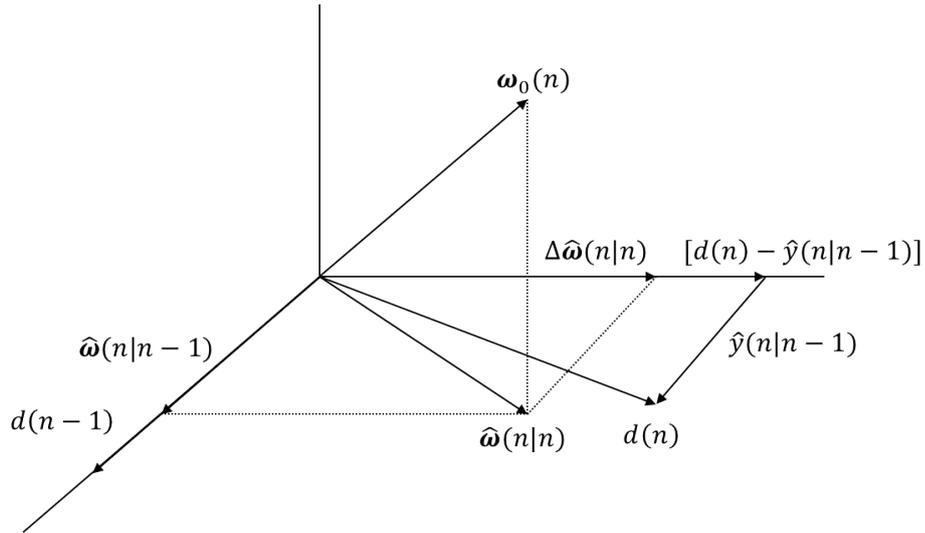


Figura 5.2 – Representação geométrica do problema da estimação linear.

A avaliação vetorial na direção  $\Delta \hat{\mathbf{w}}(n|n)$  pode ser obtida explorando a propriedade do estimador LMMSE vista em (E. W. Kamen; J. K. Su;, 1999), em que o erro é ortogonal a observação anterior, isto é,  $d(n-1) \perp [d(n) - \hat{y}(n|n-1)]$ .

Estimando uma variável aleatória de média zero  $v_1$  da observação de outra variável aleatória de média zero  $v_2$  dado por

$$\hat{v}_1 = \frac{E\{v_2 v_1\}}{E\{v_2^2\}} \cdot v_2 \quad (5.6)$$

Baseado na equação (5.6), considerando  $v_1 = \mathbf{w}_0(n)$  e  $v_2 = d(n) - \hat{y}(n|n-1)$  o termo de ajuste da equação (5.5) será

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{w}}(n|n) &= \frac{E\{\mathbf{w}_0(n)[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]\}}{E\{[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]^2\}} [d(n) - \hat{y}(n|n-1)] \\ &= \frac{E\{\mathbf{w}_0(n)[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]\}}{E\{[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]^2\}} e(n), \end{aligned} \quad (5.7)$$

que é a parcela de correção na estimação do vetor de estado,  $\hat{\mathbf{w}}(n|n)$ , no instante  $n$ .

Substituindo (5.7) em (5.5), a equação de ajuste dos coeficientes do filtro toma a forma:

$$\hat{\mathbf{w}}(n|n) = \hat{\mathbf{w}}(n|n-1) + \frac{E\{\mathbf{w}_0(n)[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]\}}{E\{[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]^2\}} e(n) \quad (5.8)$$

Definindo  $\mathbf{k}(n)$  como o vetor de ganho de Kalman

$$\mathbf{k}(n) = \frac{E\{\mathbf{w}_0(n)[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]\}}{E\{[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]^2\}} \quad (5.9)$$

A equação (5.5) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{w}}(n|n) = \hat{\mathbf{w}}(n|n-1) + \mathbf{k}^T(n)\mathbf{e}(n) \quad (5.10)$$

Para a resolução dos valores esperados em (5.9), aplica-se, inicialmente, uma abordagem idêntica a formulação utilizada no desenvolvimento do estimador linear (LMMSE). Conforme se observa na figura 5.2, têm-se que

$$\hat{\mathbf{w}}(n|n-1) \perp [d(n) - \hat{y}(n|n-1)] \quad (5.11)$$

Assim, o valor esperado do numerador de (5.9) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{w}_0(n)[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]\} &= E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]\} \\ &= E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))[\mathbf{k}_w^T(n)\mathbf{w}_0 \\ &\quad + r(n) - \mathbf{k}_w^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n|n-1)]\} \\ &= E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))[(\mathbf{w}_0(n) \\ &\quad - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))^T \mathbf{k}_w(n) + r(n)]\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Definindo  $\mathbf{P}(n|n-1) = E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))^T\}$  como a matriz de covariância do erro de estimação em  $n-1$ , a equação (5.12) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{w}_0(n)[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]\} &= \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{k}_w(n) \\ &\quad + E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))r(n)\} \\ &= \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{k}_w(n) \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))r(n)\} = 0$ .

Avaliando a matriz de covariância do erro de estimação de  $\mathbf{P}$  no instante  $n - 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(n|n-1) &= E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))^T\} \\
&= E\{(\mathbf{A}\mathbf{w}_0(n) + \mathbf{q}(n) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}(n-1|n-1))(\mathbf{A}\mathbf{w}_0(n) \\
&\quad + \mathbf{q}(n) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}(n-1|n-1))^T\} \\
&= \mathbf{A}E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n-1|n-1))(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n-1|n-1))^T\}\mathbf{A}^T \\
&\quad + E\{\mathbf{q}(n)\mathbf{q}^T(n)\} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{P}(n-1|n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde  $\mathbf{Q}(n) = E\{\mathbf{q}(n)\mathbf{q}^T(n)\} = \sigma_q^2 \mathbf{I}$ .

Calculando o denominador da equação(5.9), chega-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
E\{[d(n) - \hat{y}(n|n-1)]^2\} &= E\{[\mathbf{k}_w^T(n)\mathbf{w}_0(n) + r(n) - \mathbf{k}_w^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n|n-1)]^2\} \\
&= E\{[\mathbf{k}_w^T(n)(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1)) + r(n)]^2\} \\
&= \mathbf{k}_w^T(n)E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))^T\}\mathbf{k}_w(n) \\
&\quad + \mathbf{k}_w^T(n)E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))r(n)\} \\
&\quad + E\{r(n)(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1))^T\}\mathbf{k}_w(n) + E\{r^2(n)\} \\
&= \mathbf{k}_w^T(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{k}_w(n) + \sigma_r^2
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Substituindo (5.13) e (5.15) em (5.9), se obtém a expressão que representa o ganho de Kalman, dado por:

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{k}_w(n)}{\mathbf{k}_w^T(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{k}_w(n) + \sigma_r^2} \tag{5.16}$$

Finalmente, calculando o valor esperado da matriz recursiva  $\mathbf{P}(n|n)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(n|n) &= E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n))(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n))^T\} \\
&= E\{(\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1) - \mathbf{k}(n)[d(n) - \mathbf{k}_w^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n|n-1)]) \\
&\quad \times (\mathbf{w}_0(n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1) - \mathbf{k}(n)[d(n) - \mathbf{k}_w^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n|n-1)])^T\} \\
&= [I - \mathbf{k}(n)\mathbf{k}_w^T(n)]\mathbf{P}(n|n-1)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

A seguir, se estendem as equações derivadas para uma representação vetorial, de forma que a utilização de mais de uma observação possa ser processada pelo algoritmo KKF. A dinâmica do algoritmo é semelhante a apresentada no capítulo 2, quando abordado o Teoria da Filtragem de Kalman.

1. Predição  $\hat{\mathbf{w}}(n|n-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}(n-1|n-1)$  ( $N \times 1$ )
  2. Matriz do erro médio quadrático de predição mínima  $\mathbf{P}(n|n-1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(n-1|n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)$  ( $N \times N$ )
  3. Matriz ganho de Kalman  $\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{K}_w(n) \left[ \mathbf{K}_w^T(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{K}_w(n) + \mathbf{R}(n) \right]^{-1}$  ( $N \times M$ )
  4. Correção  $\hat{\mathbf{w}}(n|n) = \hat{\mathbf{w}}(n|n-1) + \mathbf{K}_w(n) \left[ D(n) - \mathbf{K}_w^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n|n-1) \right]$  ( $N \times 1$ )
  5. Correção da matriz do erro médio quadrático mínimo  $\mathbf{P}(n|n) = \left[ \mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\mathbf{K}_w^T(n) \right] \mathbf{P}(n|n-1)$  ( $N \times N$ )
- $M$  é o número de observações da saída a ser estimada e  $N$  é a ordem do filtro
  - $\mathbf{K}(n) = [\mathbf{k}(n), \mathbf{k}(n-1), \dots, \mathbf{k}(n-M+1)]$  é a matriz de ganho de Kalman formada por  $N$  vetores de ganho  $\mathbf{k}(n)$  ( $N \times N$ )
  - $\mathbf{K}_w(n) = [\mathbf{k}_w(n), \mathbf{k}_w(n-1), \dots, \mathbf{k}_w(n-M+1)]$  é uma matriz de observações conhecida ( $N \times M$ )
  - $D(n) = [d(n), \dots, d(n-M+1)]^T$  é um vetor de observações do sistema
  - $\mathbf{Q}(n) = E\{\mathbf{q}(n)\mathbf{q}^T(n)\}$  ( $N \times N$ )
  - $\mathbf{R}(n) = E\{\mathbf{r}(n)\mathbf{r}^T(n)\}$  ( $M \times M$ )

No capítulo a seguir serão apresentados resultados de simulações comparativas, com o objetivo de avaliar o algoritmo KKF derivado nesse capítulo.

## 6 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Neste capítulo compara-se o desempenho do algoritmo proposto KKF, com o algoritmo KLMS (LIU; POKHAREL; PRINCIPE, 2007). O KKF foi implementado com um valor fixo para a variância da flutuação do estado, dada por  $\sigma_q^2$  e com valores que variam no tempo, dado pela estimação  $\hat{\sigma}_q^2(n)$  a partir de (PALEOLOGU; BENESTY; CIOCHIN, 2013):

$$\hat{\sigma}_q^2(n) = \frac{\|\hat{\mathbf{w}}(n|n) - \hat{\mathbf{w}}(n|n-1)\|_2^2}{N} \quad (6.1)$$

Os resultados rotulados "KKFe" correspondem ao uso de (6.1). O *kernel* selecionado é o Gaussiano, com largura de banda dada por  $\xi = 0.01$ ,  $N = 20$ ,  $\mathbf{A} = I$  e  $\sigma_q^2 = 10^{-4}$ , no caso em que a variância da flutuação do estado é considerada fixa, sendo estes parâmetros utilizados em todas as simulações. Em todos os exemplos foram feitas 400 realizações para as simulações Monte Carlo.

O ruído aditivo é Gaussiano de média nula com variância  $\sigma_r^2 = 10^{-4}$ . Os desempenhos dos algoritmos foram avaliados através da estimação do EMQ.

01) *Exemplo A*: Neste exemplo considera-se o seguinte sistema não linear, dinâmico, discreto no tempo dado por

$$\begin{cases} v(n) = \alpha(n)e^{(-|v(n-1)|)} + q(n) \\ y(n) = v^2(n) \end{cases} \quad (6.2)$$

A observação  $d(n)$  é uma função com entrada  $q(n)$ . Portanto, o dicionário  $\mathcal{D}$  é construído com amostras de  $q(n)$  que é estacionário Gaussiano de média zero com variância  $\sigma_q^2$ . São apresentados resultados utilizando tanto dicionários fixos como dicionários atualizados em cada iteração.

O diagrama em blocos da figura 6.1 é utilizado como referência na análise dos resultados deste exemplo.

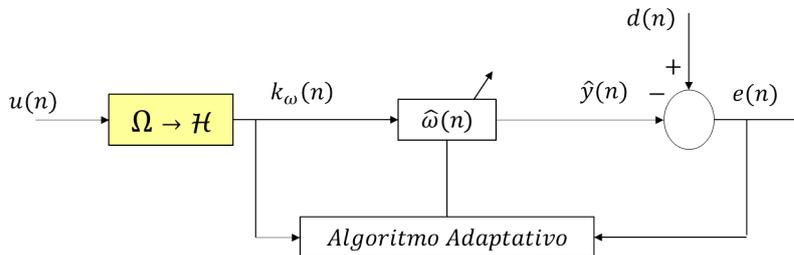


Figura 6.1 – Sistema não linear e invariante no tempo a ser estimado.

O parâmetro  $\alpha(n)$  em (6.2) é um ruído Gaussiano de média zero e variância  $\sigma_\alpha^2 = 10^{-4}$ .  $v(0) = 0.5$  e a matriz  $P(-1|-1) = 10^2$  (equação (5.14)).

Na figura 6.2 são ilustradas três curvas de comportamento do algoritmo KKF considerando a atualização do dicionário ou não, e a estimação da variância  $\sigma_q^2$  aplicando (6.1). Da mesma forma foi feita para o algoritmo KLMS em relação ao dicionário. No exemplo A.1 o passo de adaptação usado para o KLMS foi  $\mu_{klms} = 0.05$ .

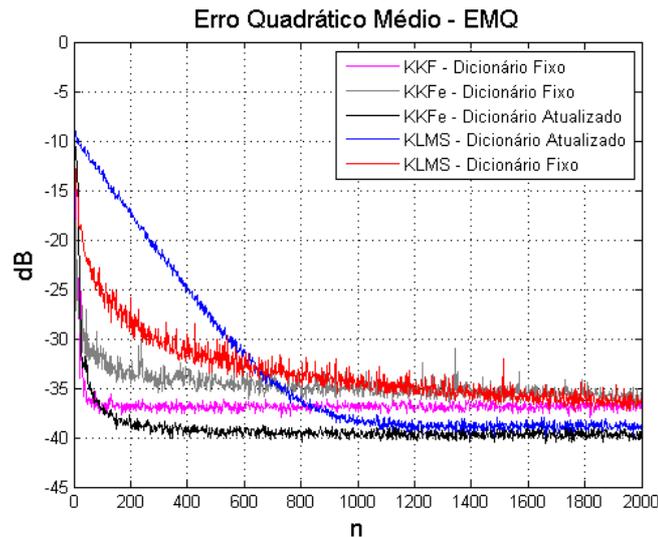


Figura 6.2 – Exemplo A.1: Passo de convergência  $\mu_{klms} = 0.05$ .

Observa-se na figura 6.2 que o algoritmo KKF (linha preta) proposto, apresenta um comportamento melhor que os demais quando utiliza um dicionário atualizado em cada iteração. Entretanto, considerando esta atualização do dicionário, o algoritmo KLMS (linha azul) apresentou um melhor comportamento que o KKF e o KKF, com dicionário fixo, em regime permanente. Entretanto, em todos os casos, o algoritmo KKF, e suas derivações, apresentaram comportamento muito superior ao KLMS em termos de sua velocidade de convergência.

De forma a tentar tornar a comparação mais justa em termos de comportamento transitório, na figura 6.3 são apresentadas curvas do KLMS para um passo de adaptação maior,  $\mu_{klms} = 0.14$ .

O valor utilizado foi escolhido em função do limite de estabilidade do algoritmo KLMS quando aplicado no processo (6.2), ou seja, para valores acima do selecionado o algoritmo divergiu.

Como o passo de adaptação modifica apenas o comportamento do KLMS, na figura 6.3 são apresentadas, para efeito de comparação, as curvas do KKF e do KLMS com dicionário atualizado. O aumento do passo de adaptação permitiu ao KLMS (linha azul) um aumento na

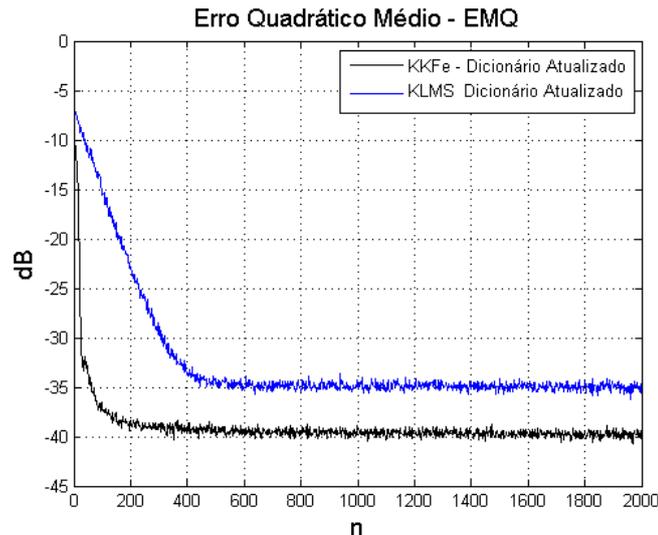


Figura 6.3 – Exemplo A.2: Passo de convergência  $\mu_{klms} = 0.14$ .

velocidade de convergência na ordem de duas vezes em relação a curva apresentada no exemplo anterior. Entretanto, esse aumento na velocidade de convergência apresentou como ônus um aumento substancial no erro em regime permanente de  $5dB$ .

02) *Exemplo B*: Nessa simulação é utilizado o mesmo processo do Exemplo A, dado pela equação (6.2). Entretanto, para os dois casos do exemplo anterior, com os mesmos valores de passo para o KLMS, foi reduzida a variância de  $\sigma_\alpha^2 = 10^{-4}$  para  $\sigma_\alpha^2 = 10^{-8}$ . Isto acarreta um grau menor de variância e conseqüentemente menor dificuldade aos algoritmos na estimação.

Na figura 6.4 são ilustradas as curvas relativas aos algoritmos KKF, KKFe e KLMS para um passo de adaptação do KLMS de  $\mu_{klms} = 0.05$ .

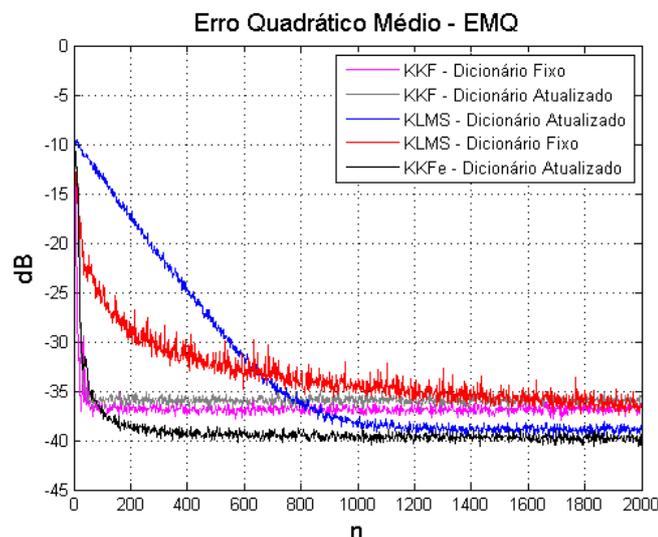


Figura 6.4 – Exemplo B.1: Passo de convergência  $\mu_{klms} = 0.05$ .

Observa-se que, comparado com o exemplo anterior, o comportamento do KKFe e do KLMS, em seus respectivos melhores desempenhos, não alteraram.

Na figura 6.5 o passo é aumentado para  $\mu_{klms} = 0.14$  com  $\sigma_\alpha^2 = 10^{-8}$ . Cabe ressaltar que o valor  $\mu_{klms} = 0.14$ , escolhido em função do limite da estabilidade do algoritmo KLMS, foi definido em relação ao processo tratado neste exemplo, dado por (6.2).

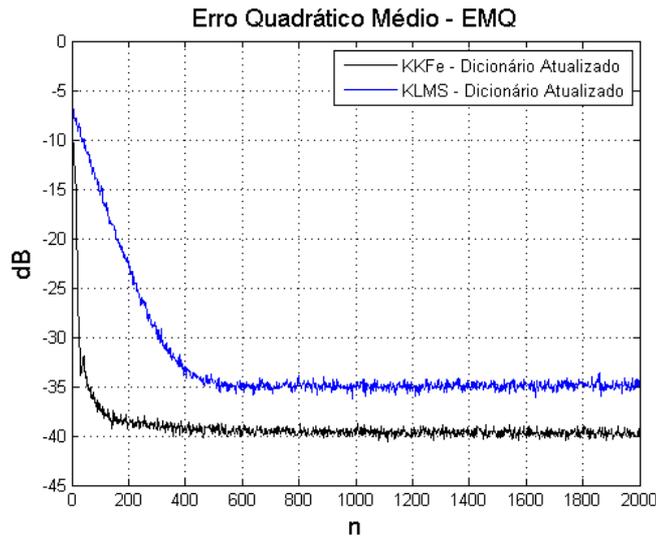


Figura 6.5 – Exemplo B.2: Passo de convergência  $\mu_{klms} = 0.14$ .

É interessante observar que o comportamento de ambos os algoritmos são similares ao mostrado na figura 6.3. Ou seja, no processo utilizado, a potência de  $\sigma_\alpha^2$  não altera a convergência dos algoritmos KKFe e KLMS, quando utilizado dicionários atualizados. Entretanto, como já destacado, o comportamento do algoritmo KKFe é superior ao KLMS na fase transitória e em regime permanente.

03) *Exemplo C*: Considera-se nesse exemplo um sistema não linear, não estacionário e variante no tempo, representado pelas expressões:

$$y(n) = [a_0(n) + a_1(n)e^{(-y^2(n-1))}]y(n-1) \quad (6.3)$$

onde  $\mathbf{a}(n) = [a_0(n) a_1(n)]^T$  é definido como

$$\mathbf{a}(n) = 0.999\mathbf{a}(n-1) + \mathbf{q}(n) \quad (6.4)$$

As observações  $d(n) = y(n) + r(n)$  são, portanto, não estacionárias. O ruído  $r(n)$ , aditivo a observação, é Gaussiano, de média zero com variância  $\sigma_r^2 = 10^{-4}$ .

Devido a não estacionariedade, o dicionário  $\mathcal{D}$  é formado pelo últimos valores das observações  $d(n-k)$ , isto é,  $\mathcal{D} = [d(n-1), \dots, d(n-N)]$ , atualizado a cada iteração. O dicionário variante no tempo auxilia tanto o algoritmo KKF, quanto o KLMS, para seguir o sistema não estacionário.

As figuras 6.6 e 6.7 comparam os resultados obtidos em simulação para o KKF e o KLMS, para diferentes passos de convergência  $\mu_{klms}$  do KLMS.

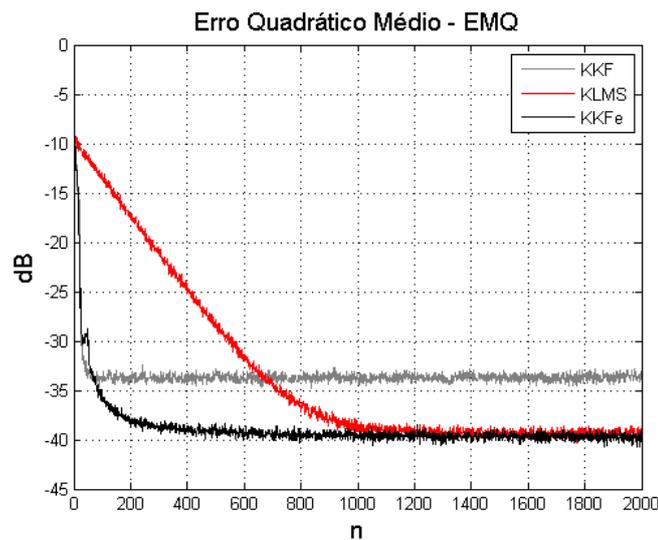


Figura 6.6 – Exemplo C.1: Passo de convergência  $\mu_{klms} = 0.05$ .

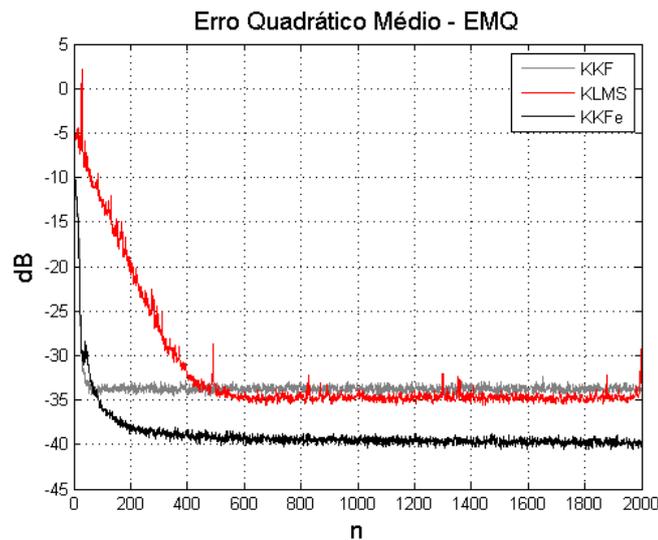


Figura 6.7 – Exemplo C.2: Passo de convergência  $\mu_{klms} = 0.16$ .

Na figura 6.6 ( $\mu_{KLMS} = 0.05$ ) observa-se o mesmo desempenho em regime permanente que o KKF com estimação da variância. Entretanto fica claro que o KKF converge com maior

velocidade que o KLMS. O KKF sem estimação da variância converge mais rápido que os demais, porém com um erro significativamente maior, em torno de 7 dB.

Na figura 6.7 o passo de convergência do KLMS é incrementado ( $\mu_{KLMS} = 0.16$ ), em função do limite da estabilidade do KLMS quando aplicado ao processo dado por (6.3), para tentar alcançar a velocidade de convergência do KKF com estimação da variância. Verifica-se um ligeiro aumento na velocidade de convergência do KLMS a um custo considerável no desempenho em regime permanente.

Concluindo, verifica-se que em todos os exemplos apresentados, o algoritmo proposto mostrou um desempenho superior quando comparado com o algoritmo KLMS. O algoritmo KLMS foi utilizado para comparação por ser o algoritmo *kernelizado* mais estudado até o momento na literatura. Outros algoritmos *kernelizados* serão explorados para comparação em trabalhos futuros.

No próximo capítulo serão apresentadas algumas linhas de conclusão, bem como, elencados tópicos de estudos futuros, fruto de indagações provenientes dos resultados obtidos nessa proposta.

## 7 CONCLUSÃO

Levando em consideração o fenômeno do eco acústico, foi possível observar a diversidade de técnicas propostas na área científica, que têm como objetivo suprimir a presença do eco em sistemas de comunicação através de canceladores construídos a partir de filtros adaptativos.

Embora muitas das aplicações propostas considerem que o caminho percorrido pelo eco acústico possa ser modelado como um sistema linear e invariante no tempo, sabe-se que esta não se trata da melhor abordagem, haja visto a influência de características não lineares e não estacionárias inerentes ao sistema onde ocorre o eco acústico.

Buscando uma solução para o problema da estimação não linear, somada a questão da não estacionariedade presente no ambiente e pouco abordada em trabalhos científicos, foi desenvolvido um estimador aplicável a sistemas não lineares e variantes no tempo, baseado na aplicação do Filtro de Kalman no RKHS, conforme desenvolvimento visto no capítulo 5.

A técnica proposta neste trabalho parte do modelamento de um sistema não linear desconhecido, em um RKHS de dimensões finitas definido por um dicionário adequado, projetado a partir de amostras do sinal de entrada. O vetor de espaço de estado é definido como o vetor dos coeficientes do modelo não linear baseado em *kernel*. Assim, um modelo simples é obtido para o modelo não linear, se destacando em relação a outros trabalhos devido a possibilidade de aplicação *online*.

Os resultados das simulações, discutidos no capítulo 6, ilustram o potencial da solução proposta quando comparada com o algoritmo KLMS, apresentando um desempenho ainda mais satisfatório quando utilizada a equação para estimação da flutuação do estado, incluída no algoritmo do KKF.

A técnica proposta neste trabalho e resultados obtidos, foi submetida, em formato de artigo ao IEEE - *International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS) 2017*, sob o título *A New Kernel Kalman Filter Algorithm for Estimating Time-Varying Nonlinear Systems* (aguardando avaliação).

### 7.1 Trabalhos futuros

A partir do desenvolvimento e resultados obtidos neste trabalho, sugere-se como possíveis extensões:

1. Estudo de metodologias alternativas para atualização do dicionário visando otimizar (não

necessariamente de forma simultânea) a velocidade de convergência e/ou a qualidade de estimação em regime permanente;

2. Estudo sobre o projeto do dicionário, incluindo ordem do modelo e parâmetro do *kernel*.  
Estudar possíveis estratégias de adaptação do parâmetro do *kernel* em tempo real;
3. Estudo do comportamento do algoritmo para ruído não gaussiano e proposição de uma versão robusta do algoritmo (robusta à distribuição do ruído);
4. Estudo sobre implementações usando múltiplos *kernels*.

## REFERÊNCIAS

- A. Guerin; G. Faucon ; R. Le Bouquin-Jeannes. Nonlinear Acoustic Echo Cancellation Based on Volterra Filters. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, v. 11, n. 6, p. 672–683, 2003.
- ARONSZAJN, N. **Theory of Reproducing Kernels**. [S.l.]: American Mathematical Society, 1950. 68 p. ISBN 0-471-03729-x.
- AZPICUETA-RUIZ, L. A. et al. Adaptive combination of volterra kernels and its application to nonlinear acoustic echo cancellation. **IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing**, v. 19, n. 1, p. 97–110, 2011. ISSN 15587916.
- BATISTA, E. L. O. et al. Filtros Volterra Adaptativos : Interpolado e Parcialmente Interpolado. **XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações**, p. 6–9, 2004.
- BERSHAD, N. J. et al. Fluctuation analysis of a two-layer backpropagation algorithm used for modeling nonlinear memoryless channels. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 47, n. 5, p. 1297–1303, 1999. ISSN 1053587X.
- BIRKETT, A. N.; GOUBRAN, R. A.; KNAPPE, M. E. Limitations of handsfree acoustic echo cancellers due to nonlinear loudspeaker distortion and enclosure vibration effects. **Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 1995., IEEE ASSP Workshop on**, p. 103–106, 1995.
- BREINING, C. Control of a hands-free telephone set. **Signal Processing**, v. 61, n. 2, p. 131–143, 1997.
- BREINING, C. et al. Acoustic echo control, an application of very-high-order adaptive filters. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 16, n. 4, p. 42–69, 1999. ISSN 10535888.
- BUDURA, G.; BOTOCA, C. Nonlinearities Identification using the LMS Volterra Filter. **Proc. WSEAS Int. Conf. on Dynamical Systems and Control**, n. 2, p. 148–153, 2005. Available from Internet: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.585.9477{& }rep=rep1{& }type=pdf>~~delimiter"026E30F\$nh~~<http://www.tc.etc.upt.ro/docs/cercetare/articole/BudBot>>.
- BURTON, T. **Efficient Subband Structures for Acoustic Echo Cancellation in Nonstationary and Nonlinear Environments**. 239 p. Thesis (Thesis (Doctor)) — Carleton University, 2010. Available from Internet: <<http://gradworks.umi.com/NR/70/NR70545.html>>.
- CONTAN, C. et al. Nonlinear System Identification Using Adaptive Volterra Filters for Echo Cancelling. **ACTA TECHNICA NAPOCENSIS - Electronics and Telecommunications**, v. 51, n. 4, p. 35–40, 2010.
- CORADINE, L. **Filtragem adaptativa em cascata: Proposta de estrutura e algoritmo, análise e aplicações**. 156 p. Thesis (PhD) — Universidade Estadual de Campinas, 1993.
- CRUZ, S. M. **Implementação de um Filtro de Kalman Estendido em Arquiteturas Reconfiguráveis Aplicado ao Problema de Localização em Robótica Móvel**. 98 p. Thesis (PhD) — Universidade de Brasília, 2013.

DUTTWEILER, D.; KAILATH, T. RKHS approach to detection and estimation problems–IV: Non-Gaussian detection. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 19, n. 1, 1973. ISSN 0018-9448.

E. W. Kamen; J. K. Su;. **Introduction to Optimal Estimation**. London: Springer, 1999. 383 p. ISBN 9781852335991.

ENGEL, Y.; MANNOR, S.; MEIR, R. The kernel recursive least squares algorithm. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 52, n. 8, p. 2275–2285, 2004. ISSN 2162-2388. Available from Internet: <<http://eprints.pascal-network.org/archive/00000909/>>.

FU, J. **New Approaches for Nonlinear Acoustic Echo Cancellation**. 99 p. Thesis (Thesis (Masters)) — Concordia University, 2007. Available from Internet: <<http://clues.concordia.ca/search/c?SEARCH=LE3C66E44M2007F8>>.

FU, J.; ZHU, W. P. A nonlinear acoustic echo canceller using sigmoid transform in conjunction with RLS algorithm. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, v. 55, n. 10, p. 1056–1060, 2008. ISSN 15497747.

GARCIA, R. V.; KUGA, H. K.; ZANARDI, M. C. Eficiência do Filtro de Kalman Unscented na estimação de atitude utilizando dados reais do satélite CBERS. **Anais XVI Simposio Brasileiro de Sensoriamento Remoto - SBSR, Foz do Iguaçu, PR, Brasil, 13 a 18 de abril de 2013, INPE**, n. 1986, p. 6917–6922, 2013.

GHOSE, K.; REDDY, V. U. A double-talk detector for acoustic echo cancellation. **Signal Processing**, v. 80, p. 1459–1467, 2000.

HAYKIN, S. **Adaptive Filter Theory**. [S.l.]: Pearson Education India, 2008.

JULIER, S.; UHLMANN, J. Unscented Filtering and Non Linear Estimation. **Proceedings of the IEEE**, v. 92, n. 3, p. 401–422, 2004. ISSN 0018-9219.

KAY, S. M. **Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory**. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1993. 303 p. ISBN 9780133457117.

KIMELDORF, G.; WAHBA, G. **Some results on Tchebycheffian spline functions**. 1971. 82–95 p.

KLIPPEL, W. **Loudspeaker Nonlinearities – Causes, Parameters, Symptoms**. 69 p. Thesis (PhD), 2015.

LIANG, C. P. et al. Nonlinear amplifier effects in communications systems. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, v. 47, n. 8, p. 1461–1466, 1999. ISSN 00189480.

LIU, W.; POKHAREL, P. P.; PRINCIPE, J. C. The Kernel least-mean-square algorithm. **IEEE - Transaction on Signal Processing**, v. 56, n. 2, p. 1633–1642, 2007.

MADER, A. e. a. Control of a hands-free telephone set. **Signal Processing**, v. 80, p. 1697–1719, 2000.

MANOLAKIS, D. G. e. a. **Statistical and Adaptive Signal Processing**. [S.l.]: Artech House, INC., Norwood, 2005, 2005. ISBN 978-1580536103.

- MATHEWS, V. J.; SICURANZA, G. L. **Polynomial signal processing**. [S.l.]: JonhWiley & Sons, Inc, New York, 2000, 2000.
- MILLER, R. T.; VILDAVSKI, V. Y.; NORCIA, A. M. Improved Volterra Kernel Methods with Applications to the Visual System. p. 1–105, 2008. Available from Internet: <<http://arxiv.org/abs/0812.1062>>.
- MONTEZANO, D. J. C. B. **Um estudo sobre o cancelamento de eco acústico em ambientes não-estacionários**. 202 p. Thesis (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2003. Available from Internet: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/85368>>.
- PALEOLOGU, C.; BENESTY, J.; CIOCHIN, S. Study of the General Kalman Filter for Echo Cancellation. **IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing**, v. 21, n. 8, p. 1539–1549, 2013.
- PALEOLOGU, C. e. a. An overview on optimized NLMS algorithms for acoustic echo cancellation. **Eurasip Journal on Advances in Signal Processing**, p. 1–19, 2015.
- PARREIRA, W. D. **Comportamento estocástico do algoritmo Kernel Least-Mean-Square**. 266 p. Thesis (Tese Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.
- RALAIVOLA, L.; D'ALCHÉ-BUC, F. Time series filtering, smoothing and learning using the kernel Kalman filter. **Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks**, v. 3, p. 1449–1454, 2005.
- RICHARD, C.; BERMUDEZ, J.; HONEINE, P. Online Prediction of Time Series Data With Kernels. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 57, n. 3, p. 1058–1067, 2009. ISSN 1053-587X.
- STENGER, A.; RABENSTEIN, R. Adaptive Volterra filters for nonlinear acoustic echo cancellation. **NSIP**, p. 679–683, 1999. Available from Internet: <<http://signal.ee.bilkent.edu.tr/Nsip99/papers/146.pdf>>.
- TAN, L.; JIANG, J. Adaptive Volterra filters for active control of nonlinear noise processes. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 49, n. 8, p. 1667–1676, 2001. ISSN 1053587X.
- THACKER, N.; LACEY, A. Tutorial: The Kalman filter. **Imaging Science and Biomedical ...**, p. 133–140, 1998. Available from Internet: <<http://www-flare.cs.ucl.ac.uk/staff/S.Prince/4C75/LaceyThackerTutorial.pdf>>.
- WAHBA, G. Support Vector Machines, Reproducing Kernel Hilbert Spaces and the Randomized GACV. **Advances in Kernel Methods - Support Vector Learning**, n. 984, p. 69–88, 1998.
- WENG, B.; BARNER, K. E. Time-Varying Volterra System Identification Using Kalman Filtering. **Information Sciences and Systems, 2006 40th**, p. 1617–1622, 2006. Available from Internet: <<http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs/all.jsp?arnumber=4068>>.
- ZHU, P.; CHEN, B.; PRINCIPE, J. C. Learning Nonlinear Generative Models of Time Series With a Kalman Filter in RKHS. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 62, n. 1, p. 141–155, 2014. ISSN 1053-587X. Available from Internet: <<http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs/all.jsp?arnumber=6613527>\\delimiter"026E30F\$http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6613>.