UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PELOTAS
CENTRO POLITÉCNICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

A-Implicações Fuzzy Valoradas Intervalarmente

por
Marília do Amaral Dias

Dissertação apresentada como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. Adenauer Corrêa Yamin
Co-orientador: Profa. Dr. Renata Hax Sander Reiser
Colaborador: Prof. Dr. Benjamín René Caleja Bedregal

DM-2010/2-007

Pelotas, maio de 2011

Dedico este trabalho a professora e colega , Viviane Mattos ,
que me incentivou a fazer este mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me dar força, dia após dia ao longo desta caminhada, em especial a Santa Edwiges.

Ao meu esposo e ao meu filho, pela compreensão e carinho nos momentos de cansaço e pela força e colaboração nesta jornada.

Aos Professores orientadores, em especial a Profª Renata Reiser, pela compreensão, competência e empenho na orientação deste trabalho e pela confiança depositada em mim.

A todos os meus colegas de mestrado pelo carinho, paciência e companheirismo demonstrado pelo apoio nos momentos de desânimo.

E por fim, a todas as pessoas que de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

"A lógica é a cola que gruda
os métodos do raciocínio"
D.GRIES E F.SHENEIDER

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

T	t-norma
S	t-conorma
N	Negação
N_C	Negação Padrão
MI	Matemática Intervalar
$\mathbb{T}$	t-norma intervalar
$\mathbb{S}$	t-conorma intervalar
$\mathbb{I}$	Implicação intervalar
$\mathbb{N}$	Negação intervalar
$\mathbb{N}_{\mathbb{C}}$	Negação Padrão intervalar
I	Implicação
QL	QL-implicação
D	D-Implicação
R	R-implicação
S	S-implicação
$\mathbb{I}$	Implicação intervalar
$\mathbb{QL}$	QL-implicação intervalar
$\mathbb{D}$	D-Implicação intervalar
$\mathbb{R}$	R-implicação intervalar
$\mathbb{S}$	S-implicação intervalar
V	Verdadeiro
F	Falso
H	Hipótese
Eq.	Equação
Prop.	Propriedade

T_M	t-norma do mínimo
T_L	t-norma de Lukasiewicz
T_D	t-norma drástica do produto
T_P	t-norma do produto
S_M	t-conorma do máximo
S_L	t-conorma de Lukasiewicz
S_D	t-conorma drástica da soma
S_P	t-conorma do produto
t-norma	Norma triangular
t-conorma	Conorma triangular
CIR	Representação Canônica Intervalar
$\widehat{f}$	Função intervalar f
$\mathbf{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{R}$	Conjunto de Intervalos Reais
l, r	Funções de Projeções
$\in$	Símbolo de pertence-indica relação de pertinência
$\notin$	Símbolo de não pertence-indica relação de não pertinência
$<$	Sinal de comparação-menor
$\leq$	Sinal de comparação-menor ou igual
$>$	Sinal de comparação-maior
$\geq$	Sinal de comparação-maior ou igual
$\subseteq$	Sinal de inclusão- indica relação de inclusão
$\cap$	Intersecção de conjuntos
$\cup$	União de conjuntos
$\forall$	Quantificador universal - indica para todo ou qualquer que seja
$\Leftrightarrow$	Equivalência
$\Rightarrow$	Implicação
$\exists$	Quantificador existencial - existe pelo menos um
$\sqsubseteq$	Ordem de informação
inf	Limite inferior de um intervalo
sup	Limite superior de um intervalo
$(\Rightarrow)$	Prova de ida
$(\Leftarrow)$	Prova de volta

$\neq$	Sinal de diferente
$\emptyset$	Conjunto vazio
μ	Função de pertinência
c.c.	Caso contrário
$\vert$	Símbolo de tal que
$\neg$	Símbolo de negação
$\wedge$	Símbolo de conjunção
$\vee$	Símbolo de disjunção
$\rightarrow$	Símbolo de condicional
$\leftrightarrow$	Símbolo de bicondicional
min	Mínimo
max	Máximo
C	Classes
sg	Função sinal
$\mathbf{sg}$	Função sinal intervalar
ln	Função logarítmica
I_Y	Implicação de Yager
$\mathbb{I}_{\mathbb{Y}}$	Implicação de Yager intervalar
G_h	Implicação Fuzzy
$\mathbb{G}_h$	Implicação Fuzzy intervalar

RESUMO

Na lógica fuzzy, as proposições fuzzy valoradas intervalarmente podem ser combinadas utilizando-se diferentes operadores de agregação (t-normas intervalares, t-conormas intervalares) e o complemento intervalar, gerando novos operadores de implicações intervalares. Na extensão intervalar dos conjuntos fuzzy, as implicações fuzzy intervalares têm um papel fundamental fornecendo a fundamentação para o desenvolvimento das regras de inferências em sistemas especialistas baseados na lógica fuzzy intervalar. Para a análise de propriedades algébricas, a maioria dos operadores de implicações fuzzy e suas correspondentes extensões intervalares, estão baseados em duas formas de representação: (i) explícita, definida em termos dos operadores de agregação, como verificam-se nas classes de S-implicações, QL-implicações e D-implicações; ou, ainda (ii) implícita, como as R-implicações. No entanto, algumas operações de implicação fuzzy frequentemente aplicadas em sistemas especialistas não se enquadram em uma destas formas de representação. Esta nova classe de implicação é referenciada como A-implicações, onde as relações com os operadores de agregação são definidas a partir de uma axiomatização baseada em propriedades algébricas. Portanto, para descrever a extensão intervalar destes operadores, neste trabalho estuda-se a axiomatização das implicações de Yager e da G_h-implicação.

Com base em tal estudo, este trabalho introduz a representação canônica intervalar das implicações de Yager e G_h-implicação. Além disso, inclui uma análise da ação de automorfismos intervalares sobre estas classes de A-implicações valoradas intervalarmente relacionando as propriedades algébricas que são verificadas por estas construções intervalares.

Palavras-chave: Lógica Fuzzy, Implicação Fuzzy, Implicação Fuzzy Intervalar, A-Implicação Fuzzy.

TITLE: “ A-FUZZY IMPLICATIONS VALUED INTERVALARMENTE”

ABSTRACT

In fuzzy logic, the interval valued fuzzy propositions can be combined using different aggregations (interval t-norms, interval t-conorms) and interval negations, generating new interval implications. The interval extension of fuzzy sets plays a crucial role in providing the foundation for the development of inference rules in expert systems based on interval valued fuzzy logic. Most fuzzy implication operators and their corresponding interval extensions are based on two types of representations: (*i*) the explicit representations defined in terms of aggregation operators,such as the classes of S-implications, QL-implications and D-implications; and (*ii*) implicit representations, considering forinstance R-implications. However, some fuzzy implication operations often applied in expert systems can not be classified in one of these two representations. In this new class of implications, referred to as A-implications, the relations with the aggregation operators are axiomatically defined based on algebraic properties. Therefore, to describe an interval extension of these operators, this study focuses on Yager’s implications, G_h funtions and related properties of interval valued fuzzy implications, which can not be naturally represented explicitly or implicitly.

Based on such study, this work introduces the canonical interval representation of the Yager’s implications and G_h implication. In addition, it includes an analysis of the action of interval automorphisms on the class of interval valued A-implications and related algebraic properties which are verified by this interval constructions.

Keywords: Fuzzy Logic, Fuzzy Implication, Interval Fuzzy Implication, A-Fuzzy Implication.

1 INTRODUÇÃO

Na lógica clássica, o raciocínio lógico bivalente está baseado em premissas e conclusões, onde determinada afirmação é falsa ou verdadeira, não podendo ser ao mesmo tempo parcialmente verdadeira e parcialmente falsa, isto é descrito pelo princípio do meio excluído (DUBOIS; PRADE, 1996). Entretanto, os sistemas do mundo real nem sempre são bivalentes, nem sempre estão constituídos por fatos absolutamente verdadeiros ou falsos, justificando-se a necessidade de lógicas multivalentes para tratar e representar incertezas (ROSS, 1995; SILER; BUCKLEY, 2004; CARLSSON; FULLER, 2002).

A lógica fuzzy surge num contexto onde os recursos tecnológicos disponíveis são, muitas vezes, incapazes de automatizar as atividades relacionadas a problemas de natureza real que correspondem às situações ambíguas. Uma das importantes vantagens do uso da lógica fuzzy em sistemas dedutíveis é a possibilidade de gerar uma saída lógica a partir de um conjunto de entradas com informações vagas, ambíguas e imprecisas. Neste aspecto, os sistemas fuzzy auxiliam para que as decisões tomadas pela máquina se aproximem cada vez mais das decisões humanas (FODOR; ROUBENS, 1994; HáJEK, 1998; ROSS, 1995).

Fundamentada na Teoria de Conjuntos Fuzzy, esta lógica faz uso de variáveis linguísticas, as quais são interpretadas como números fuzzy e manipuladas pela sua aritmética, permitindo representar valores de pertinência intermediários entre os valores de verdadeiro (1) e falso (0) da lógica binária. A Lógica Fuzzy fundamenta a geração de técnicas para a solução de problemas com aplicabilidade, especialmente nas áreas de controle e tomada de decisão (GRIGOLETTI et al., 2006; ESCARDó, 1996). Assim, os operadores fuzzy foram definidos à semelhança dos tradicionalmente utilizados na lógica clássica, e embora freqüentemente introduzidos por necessidades de caráter eminentemente prático, tem-se consolidado como uma área de pesquisa formal, incluindo análise de propriedades e extensões.

As normas triangulares (t-normas) e conormas triangulares (t-conormas) constituem uma ferramenta indispensável para a interpretação da conjunção e disjunção em lógica fuzzy (HáJEK, 1998), contribuindo junto com outras funções de agregação e a negação fuzzy, na definição das implicações fuzzy (BEDREGAL; DIMURO; REISER, 2009; BEDREGAL et al., 2007a; BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009a). Estas operações binárias, definidas sobre o intervalo unitário fechado [0,1] de números reais, desempenham um papel importante em sistemas fuzzy aplicados em estatísticas (DIMURO; COSTA, 2006), bem como nas teorias de medidas (KLEMENT; MESIAR; PAP, 1999) e na modelagem de jogos cooperativos (BUTINARIU; E.P., 1993), entre tantas outras áreas.

Por outro lado, a matemática intervalar vem sendo empregada no tratamento da incerteza dos resultados aproximados em algoritmos numéricos da computação científica (ACIÓLY, 1991), onde os valores incertos são armazenados através de intervalos, cujos extremos são pontos flutuantes (HU et al., 2008; FODOR; ROUBENS, 1994). O uso de técnicas intervalares viabiliza a elaboração de algoritmos autovalidáveis, com controle automático para o limite dos erros inerentes aos processos numéricos quando do tratamento da precisão em sistemas computacionais, proporcionando maior confiabilidade em relação a critérios como tempo de execução, memória, arredondamentos e truncamentos (GRIGOLETTI et al., 2006; ALEFELD; FROMMER; LANG, 1996; ALEFELD; HERZBERGER, 1983).

Na integração destas duas teorias, busca-se uma modelagem matemática que trate ambos os contextos, a incerteza da informação e a precisão dos dados computados. Portanto, faz-se uso de subintervalos do intervalo unitário [0, 1] para atribuir valores verdades às proposições fuzzy referentes a uma determinada propriedade de um sistema. Esta extensão da lógica fuzzy é conhecida como lógica fuzzy valorada intervalarmente ou simplesmente lógica fuzzy intervalar. Por conseguinte, segue-se a teoria axiomática proposta por (BEDREGAL et al., 2007b), a qual está focada na fundamentação para extensões intervalares dos operadores da lógica fuzzy, capaz de preservar as propriedades lógicas dos operadores clássicos e permitir definições obtidas de forma canônica (BEDREGAL, 2007; BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009a; BACZYNSK; JAYARAM, 2009).

Considerando esta abordagem, nesta dissertação considera-se a fronteira entre duas teorias, a lógica fuzzy e a matemática intervalar, ambas focadas no estudo de soluções para tratamento de incerteza. Neste contexto, este trabalho busca contribuir para obter as generalizações com foco nas implicações fuzzy intervalares, considerando a análise das propriedades analíticas, incluindo as importantes classes referenciadas na literatura e nas aplicações, e seguindo a abordagem proposta em (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a; BEDREGAL et al., 2007a), que considera a representação canônica intervalar.

Mais especificamente, este trabalho estuda a versão intervalar para as implicações fuzzy que não podem ser naturalmente representadas, seja na forma explícita, seja na forma implícita, em termos de agregadores e/ou negação.

1.1 Tema e Principais Motivações

O tema deste trabalho se refere ao estudo das A-implicações fuzzy, considerando a análise das propriedades lógicas. Este estudo inclui importantes classes de implicações fuzzy referenciadas na literatura e nas aplicações, e seguindo a abordagem proposta em (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a) que considera a representação canônica intervalar.

A partir deste estudo, busca-se definir a extensão intervalar para a classe das A-implicações fuzzy . As extensões dos casos pontuais e das propriedades verificadas por estes casos podem contribuir na generalização de sistemas especialistas, ou possíveis aplicações.

Vários trabalhos tem sido propostos, provendo fundamentos para sistemas especialistas baseados em lógica fuzzy. Entretanto, as classes das implicações mais frequentemente estudadas são aquelas que podem ser representadas de forma explícita ou implícita (TURSKEN; KREINIVICH; YAGER, 1998).

A representação explícita em termos de t-normas (T), t-conormas (S) e negação fuzzy (N) é considerada no estudo, por exemplo, nas classes de:

- S-implicações: $I_S(x,y) = S(N(x),y)$, $\forall\ x,y\ \in\ [0,1]$, neste caso generalizando a condicional da lógica clássica $\neg p \lor q \equiv p \to q$ (RUIZ-AGUILERA; TORRENS, 2009);

- QL-implicações: $I_{QL}(x,y) = S(N(x),T(x,y))$, $\forall\ x,y\ \in\ [0,1]$, neste caso generalizando a condicional da lógica clássica $\neg p \lor (p \land q) \equiv p \to q$ (FODOR, 1991);

- D-implicações: $I_D(x,y) = S(T(N(x),N(y)),y)$, $\forall\ x,y\ \in\ [0,1]$, neste caso generalizando a condicional da lógica clássica $(\neg p \land \neg q) \lor q \equiv p \to q$ (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a),.

Como exemplo de representação implícita, tem-se as

- R-implicações: $I_R(x,y) = \sup\{z\ \in\ [0,1] \mid T(x,z) \leq\ y\ \}$, (BEDREGAL et al., 2007).

Entretanto, várias implicações não possuem representação explícita nem implícita. Este trabalho concentra-se no estudo das funções:

- Implicação de Yager: $I(x,y) = y^x$, (YAGER, 2004a).

- Implicação G_h:$G_h(x,y) = (1 - sg(x-y)) \cdot \max(1 - \max(x,y), y)$, sendo sg a função sinal (HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006).

Neste contexto, justifica-se este trabalho no sentido de avaliar uma construção axiomática mais abrangente para a definição de novas classes de implicações fuzzy, cuja representação não está definida na forma explícita nem implícita. Assim, os resultados obtidos com esta axiomatização podem ser aplicadas para análise da classe das implicações de Yager valoradas intervalarmente e da versão intervalar para as funções G_h.

Na sequência, como principais motivações para o desenvolvimento deste trabalho, destacam-se:

- Importância de incentivar o estudo da lógica fuzzy intervalar para a sua aplicação em sistemas fuzzy;

- Relevância em aproximar a área de fundamentação da matemática intervalar com a lógica fuzzy de forma a promover uma visão integrada, viabilizando melhoria na compreensão dos fundamentos da lógica fuzzy intervalar;

- Necessidade de aprofundar o estudo sobre a representação de implicações fuzzy e suas extensões intervalares, mas restritas à representação canônica intervalares.

- Necessidade de consolidar a interação entre os grupos de pesquisa Grupo de Matemática e Fundamentos da Computação (GMFC/UCPel) e Grupo de Lógica, Linguagem, Informação, Teoria e Aplicações (LoLITA/UFRN) no desenvolvimento de novas perspectivas de pesquisa na área de lógica fuzzy intervalar.

A motivação para o desenvolvimento deste Projeto pode ser creditada ao desejo de investir a realização destas propostas ou de contribuir no sentido de que se tornem mais claras e precisas.

1.2 Justificativa

A bivalência está profundamente enraizada no modo de pensar, ou seja, algo é verdadeiro ou não-verdadeiro, branco ou preto, um ou zero. Não há nada entre ambas, o meio é excluído. Por exemplo, alguém é feio ou bonito. Mas, é comum ouvir a expressão "É bonitinha" (significando que é um pouco bonita).

Há um considerável descompasso entre o mundo real e a nossa visão bivalente do mesmo, a começar pelo fato que o mundo real contém um número infinito de sombreamento e graus de cinza entre as cores preta e branca. Um outro exemplo típico ocorre em diagnósticos médicos: o profissional costuma contabilizar em sua mente um número enorme de fatores diferentes, e até contraditórios, para se descrever a doença do paciente (SILER; BUCKLEY, 2004). No mundo real, tem-se um número infinito de opções em vez de duas. Ou seja, o mundo real é analógico, não digital, com muitos tons de cinza entre branco e preto. Portanto, o objetivo da lógica fuzzy é o de capturar esses tons de cinza e graus de verdade.

Por outro lado, os computadores clássicos estão baseados na bivalência: 0 e 1. Tais computadores não conseguem entender os termos fuzzy da comunicação humana. A lógica fuzzy pode preencher esse vazio e traduzir os graus de verdade das informações de uma maneira que os computadores possam processar tal informação. Ao pensar, raciocinar as pessoas utilizam a implicação lógica, que consiste na formulação de uma conexão entre causa e efeito, ou uma condição e sua consequência.

Implicações lógicas modelam muitos sistemas especialistas aplicados em várias situações, por exemplo, ao se operar uma máquina, ao se resolver problemas matemáticos, programar um computador, seguir um procedimento em um manual de instruções, ou até tomar uma decisão de qual produto comprar. Nesses casos, segue-se consciente ou inconscientemente certas regras de inferências, da forma a seguir. Sejam A,B conjuntos:

$$r_1 : \text{se condição A então consequência B} \tag{1.1}$$

Analogamente, na lógica fuzzy tem-se o raciocínio com números fuzzy e conjuntos fuzzy, e as deduções podem ser consideradas como regras práticas, como na seguinte situação (SIMÕES; SHAW, 2007):

SE o trânsito está INTENSO na Avenida X ENTÃO mantenha o sinal verde por MAIS TEMPO, onde os termos INTENSO E MAIS TEMPO representam conjuntos fuzzy. Neste caso, INTENSO é uma função que determina o grau de densidade do trânsito e MAIS TEMPO é uma função que determina o grau de duração do tempo de operação do sinal. O fato de se implantar "inteligência" no controlador de semáfaro consiste então em associar esses termos fuzzy através de uma inferência fuzzy, expressa por regras fuzzy que estendem a regra r_1 dada na Eq.1.1, as quais podem ser obtidas por implicações fuzzy.

Tem-se então a estrutura de regra condicional fuzzy, onde $\mathbf{U} = [0, 1]$ e X, Y são conjuntos não-vazios (finitos):

$$r_2 : \text{se x está em A então y está em B} \tag{1.2}$$

sendo A e B conjuntos fuzzy, os quais são definidos por pares, dados pelo elemento e seu correspondente grau de pertinência: $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ e $B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y \in Y\}$.

Neste contexto, tem-se que $\mu_A : X \to \mathbf{U}$ e $\mu_B : Y \to \mathbf{U}$ são as funções de pertinência, dos conjuntos A e B, respectivamente. Entretanto, se na modelagem de um controlador de trânsito são considerados mais de um especialista, pode-se considerar diferentes graus de pertinências para a mesma variável. Neste caso, tem-se uma representação baseada em conjuntos fuzzy valorados intervalarmente, e as regras de inferência podem ser obtidas a partir das implicações fuzzy intervalares.

Seja $\mathbb{U}$ o conjunto de todos os intervalos de números reais contido no intervalo unitário **U**. Considerando μ_A o grau de pertinência intervalar de um elemento x em um conjunto $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{U}$, e μ_B de um elemento y em um conjunto $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{U}$, tem-se a extensão intervalar de regra fuzzy r_2 na Eq. 1.2:

$$r_3 : \text{se } \mu_A(x) \in \mathbb{A} \text{ então } \mu_B(y) \in \mathbb{B} \tag{1.3}$$

Neste caso, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são conjuntos fuzzy valorados intervalarmente, os quais são definidos por pares, contendo o elemento x e seu correspondente grau de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ intervalar: $\mathbb{A} = \{(x, \mu_{\mathbb{A}}(x)) \mid x \in X\}$ e $\mathbb{B} = \{(y, \mu_{\mathbb{B}}(y)) \mid y \in Y\}$.

Dada a relevância das implicações fuzzy valoradas intervalarmente em sistemas de inferência de sistemas especialistas, justifica-se o estudo proposto neste trabalho, o qual pode ser creditado ao desejo de:

- estudar as principais classes de implicações fuzzy;
- investigar quais as classes de implicação que não podem ser explícitas ou implicitamente representadas;
- colaborar na proposta de uma axiomatização para estas implicações tornado esta classificação mais precisa e objetiva.

Para tal, busca-se avaliar os axiomas que definem a classe de A-implicações fuzzy e estender os resultados obtidos para representação das implicações de Yager valoradas intervalarmente.

A organização para este estudo está feita de forma que sejam contemplados os objetivos previstos na seção seguinte, incluindo um estudo das principais classes de implicações fuzzy com ênfase na classe das implicações de Yager.

1.3 Questões de Pesquisa e Objetivos

Este trabalho busca contribuir no sentido de tornar mais claras estas questões e colaborar no sentido de propor respostas viáveis. Para tal apresentam-se, logo a seguir, os objetivos do desenvolvimento desta dissertação.

O desenvolvimento deste trabalho procura responder aos seguintes questionamentos, constituindo relevantes temas de pesquisa da área de computação fuzzy:

- Como aproximar a área de fundamentação da matemática intervalar com a lógica fuzzy? Esta aproximação deverá promover uma visão integrada, viabilizando soluções oportunas e melhoria na compreensão dos fundamentos da lógica fuzzy intervalar.
- Como incentivar o estudo da lógica fuzzy intervalar no sentido restrito, chamando a atenção para o estudo das implicações fuzzy valoradas intervalarmente e a sua aplicação em sistemas fuzzy?

- Como contribuir com a representação da classe de A- implicação fuzzy (intervalar) a partir do estudo de suas propriedades algébricas mais relevantes para modelagem de sistemas fuzzy?

O objetivo principal deste trabalho é abordar a pesquisa em lógica fuzzy intervalar visando contribuir para o estudo das implicações fuzzy intervalares, no sentido da análise e extensão intervalar de suas principais propriedades para o desenvolvimento teórico e fundamentação de aplicações mais relevantes.

Mais especificamente, busca-se:

- Revisar os fundamentos da lógica fuzzy e da matemática intervalar.
- Caracterizar o estado da arte da lógica fuzzy intervalar.
- Estudar os principais operadores fuzzy, incluindo as correspondentes extensões intervalares.
- Analisar as propriedades, diferentes tipos de implicações fuzzy e as representações baseadas em operadores de agregação, incluindo as correspondentes extensões intervalares.
- Introduzir uma axiomatização para definição de implicações fuzzy intervalares independentemente de representação explícita ou implícita.
- Introduzir duas classes de A-implicações valoradas intervalarmente: $\mathbb{I}_Y$ e $\mathbb{G}_h$.
- Consolidar a participação no Grupo de Matemática e Fundamentos da Computação (GMFC).

1.4 Metodologia

A metodologia utilizada neste trabalho foi o levantamento bibliográfico dos fundamentos da lógica fuzzy intervalar visando um estudo introdutório das principais classes de implicações fuzzy (S-implicações, R-implicações, QL-implicações,D-implicações e A-implicações) e as correspondentes representações intervalares.

Esta metodologia considera o desenvolvimento de atividades que envolvem:

- Revisão bibliográfica da matemática intervalar, fundamentação para computação e identificação das aplicações científicas.
- Estudo dos fundamentos da lógica fuzzy, aplicações de sistemas fuzzy e estudo de casos de aplicação de sistemas fuzzy;
- Identificação e análise dos principais implicações fuzzy, principais propriedades, classificação e as correspondentes aplicações;
- Estudo da axiomatização para definição de A-implicações fuzzy .
- Estudo da lógica fuzzy valorada intervalarmente, baseada na representação canônica de funções intervalares, de acordo com o trabalho de pesquisa do grupo de pesquisa GMFC;

- Estudo e análise da representação canônica das principais implicações fuzzy valoradas intervalarmente,

- Introdução da axiomatização para definição de A-implicações fuzzy valoradas intervalarmente;

- Avaliação dos resultados obtidos, construção do texto final e publicação dos resultados.

Salienta-se ainda que as atividades de revisão bibliográfica e estudo compreendem:

(i) estudo individual de várias referências bibliográficas;

(ii) apresentação de seminários e exposição oral sobre o assunto, incluindo discussão no grupo de pesquisa, com periodicidade semanal;

(iii) elaboração de um texto detalhado para consulta do grupo de pesquisa. De forma análoga, a atividade de avaliação compreende elaboração de texto final e definição da continuidade deste estudo a partir da revisão das atividades propostas de acordo com a avaliação dos resultados obtidos.

1.5 Organização do Texto

A apresentação deste texto está organizada em 8 capítulos, brevemente resumidos logo a seguir.

O Capítulo 1 descreve a corrente introdução, onde estão registrados a motivação, o tema, a justificativa, os objetivos e a metodologia para o trabalho descrito neste texto.

No Capítulo 2, descreve-se sobre os fundamentos da lógica fuzzy e de conjunto fuzzy, fazendo uma distinção entre a lógica clássica e a lógica fuzzy. Ainda considera-se, um resumo sobre Matemática Intervalar e das principais operações intervalares. Discorre-se também, sobre a representação intervalar de funções reais e sua importância para a lógica fuzzy intervalar.

No Capítulo 3, discorre-se sobre as funções de agregação da lógica fuzzy , mais especificamente, as normas triangulares e as conormas triangulares, incluindo as negações fuzzy. Ainda, são estudados a dualidade entre t-norma e t-conorma e automorfismos atuando sobre t-normas e t-conormas, mostrando que estes operadores preservam propriedades importantes destas funções de agregação e de negação.

No Capítulo 4 considera-se o estudo das implicações fuzzy, suas propriedades e mais precisamente, caracterizações de algumas classes de implicações fuzzy, principalmente, na análise de propriedades algébricas de quatro importantes classes de implicações fuzzy: S-implicações, R-implicações, QL-implicações e D-implicações. Estuda-se ainda, automorfismos atuando sobre as principais classes de implicações fuzzy.

O Capítulo 5, apresenta uma axiomatização de implicações fuzzy que não podem ser naturalmente representadas na forma explícita ou na forma implícita, que são consideradas na literatura como A-implicações. Entre estas implicações, discorre-se sobre as implicações de Yager e as subclasses das G_h-Implicações fuzzy.

No Capítulo 6 são estudados os agregadores (normas triangulares intervalares e conormas triangulares intervalares) e negações fuzzy intervalares. Estuda-se sobre construção canônica de um automorfismo intervalar, melhor representação de um automorfismo intervalar e automorfismos agindo sobre negações fuzzy intervalares e sobre normas triangulares intervalares.

O Capítulo 7 aborda sobre as implicações fuzzy intervalares, suas propriedades e mais precisamente , caracterizações de algumas classes de implicações fuzzy valoradas intervalarmente e, sobre a ação de automorfismos sobre estas classes de implicações fuzzy intervalares.

O Capítulo 8 introduz as implicações de Yager valoradas intervalarmente e a versão intervalar da G_h implicação. Também são apresentadas as funções intervalares das Φ-conjugadas destas duas classe de A-implicações.

No Capítulo 9 são destacados os principais tópicos explorados no texto e apresentadas as conclusões obtidas. Às conclusões gerais, acrescentam-se ainda as principais contribuições, as publicações dos resultados e a continuidade do trabalho em projetos futuros.

2 LÓGICA FUZZY VALORADA INTERVALARMENTE

A lógica fuzzy é uma ferramenta matemática que permite operar com situações onde as fronteiras entre o verdadeiro ou falso são incertos. Tem relevante utilidade computacional, pois a lógica fuzzy fornece condições de traduzir informações vagas, difusas em valores numéricos, possibilitando a inclusão da experiência humana em controle computadorizado, tornando possível decisões em problemas complexos.

Este capítulo apresenta uma fundamentação teórica dos conceitos de lógica fuzzy e de conjunto fuzzy, fazendo uma distinção entre lógica fuzzy e lógica clássica. É analisado também, um sistema de regras fuzzy, através de um estudo de caso.

2.1 Lógica clássica

Por que a Lógica clássica não é suficiente para modelagem de sistemas reais? Certamente porque não consegue modelar a incerteza. A Lógica Clássica, ciência fundada por Aristóteles, lida com verdadeiro ou falso. Uma proposição pode ser verdadeira ou falsa, mas em diferentes ocasiões. Se é verdadeira, possui um valor verdade igual a 1. Se não, possui um valor verdade igual a zero. Proposições podem ser combinadas para gerar outras proposições, através, por exemplo, de operadores lógicos. Quando se diz que uma proposição é verdadeira ou falsa, está se fazendo uma declaração com certeza. Estas são chamadas declarações "crisp".

Por outro lado, existem declarações para as quais se tem apenas um certo grau de certeza. A modelagem deste tipo de situação por sistemas especialistas pode ser obtida pela aplicação da Lógica Fuzzy. A abordagem fuzzy trata com proposições que são valoradas como verdadeiras a partir de um certo grau de certeza - algo entre 0 e 1.

Incorporando o conceito de grau de verdade, a teoria dos conjuntos fuzzy estende a teoria dos conjuntos tradicionais.

Os conjuntos são então classificados qualitativamente (exemplos: morno, pequeno, perto, ativo, quase, alto, parcialmente). Os elementos destes conjuntos são classificados segundo o grau de pertinência. Por exemplo, a velocidade de um carro a 80 km/h e a 150k/h, pertencem ao mesmo conjunto, mas com diferentes graus de pertinência.

Uma das características da Lógica Clássica é o axioma do Terceiro Excluído, isto é, não existe alternativa para um valor verdade além de verdadeiro ou falso. Ao lidar com problemas reais, no entanto, verifica-se que o conhecimento disponível não é nem absolutamente verdadeiro nem absolutamente falso, podendo ser, indeterminados, confusos, verdadeiros em geral ou ainda, falsos com uma certa probabilidade. Para estender a Lógica Clássica de maneira a permitir o tratamento deste tipo de conhecimento, é necessário alterar o conjunto de valores, e neste caso, não mais restrito a verdadeiro ou falso. A Lógica Fuzzy constitui-se num dos formalismos propostos para alterar este conjunto de valores.

Na lógica clássica proposicional, lida-se com proposições, que podem ser verdadeiras ou falsas. As combinações de proposições p e q, para formar novas proposições, são derivadas a partir de operações lógicas básicas. A partir de proposições dadas podem se construídas outras proposições pelo uso dos conectivos (CASTRUCCI, 1984),(FILHO, 1986):

(i) Conjunção: $p \wedge q$ (determina a verdade quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade nos demais casos);

(ii) Disjunção: $p \vee q$ (estabelece a verdade quando ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira e a falsidade quando ambas as proposições são falsas);

(iii) Negação: $\neg p$ (a negação literalmente, nega a proposição que tem como argumento, "é falso que" ou "não e verdade que" são expressões semânticas destes conectivos, onde $\neg 0 = 1$ e $\neg 1 = 0$);

(iv) Implicação: $p \longrightarrow q$ (determina a falsidade apenas quando o antecedente p for verdadeiro e o consequente q for falso);

(v) Bicondicional: $p \leftrightarrow q$ (determina a verdade quando ambas as proposições são verdadeiras ou ambas são falsas).

Na lógica proposicional, proposições não relacionadas entre si podem ser combinadas para formar uma implicação, e não se considera nenhuma relação de causalidade, tão presente no mundo real, conforme descreve a Tabela 2.1

Tabela 2.1: Tabelas verdade para as operações fundamentais da lógica

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$	$\sim p$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

2.2 Lógica Fuzzy

As primeiras noções da lógica dos conceitos "vagos" foi desenvolvida por um lógico polonês Jan Lukasiewicz (1878-1956) em 1920 que introduziu conjuntos com graus de pertinência no conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ e, mais tarde, expandiu para um número infinito de valores entre $[0, 1]$.

A primeira publicação sobre lógica fuzzy data de 1965, quando recebeu este nome. Seu autor foi Lotfi Asker Zadeh, professor em Berkeley, Universidade da California (ZADEH, 1965),(ZADEH, 1994). Zadeh introduziu a lógica fuzzy combinando os conceitos da lógica clássica e os conjuntos de Lukasiewicz, definindo os graus de pertinência.

A lógica fuzzy é multivalente, isto é, reconhece vários valores, assegurando que a verdade é uma questão de ponto de vista ou de graduação, definindo o grau de veracidade em um intervalo numérico [0,1].

A lógica fuzzy provê uma forma de gerenciamento de incertezas, através da expressão de termos com um grau de certeza. Num intervalo numérico [0,1], a certeza absoluta é representada pelo valor 1 e a falsidade, por 0.

Expressões verbais, imprecisas, qualitativas, inerentes da comunicação humana, que possuem vários graus de incerteza, são perfeitamente manuseáveis através da lógica fuzzy. No raciocínio humano, consistindo de implicações lógicas, ou também chamado por inferência lógica, a entrada ou condição e a saída ou conseqüência, são associados por regras de raciocínio, com graus de verdade no intervalo [0,1]. Desta forma a lógica fuzzy pode, sistematicamente, traduzir os termos da comunicação humana (linguísticas) em valores fuzzy compreensíveis por sistemas especialistas (SIMÕES; SHAW, 2007).

2.2.1 Conjuntos Fuzzy

A Lógica Fuzzy está baseada na Teoria dos Conjuntos Fuzzy (CHEN; PHAM, 2001). Com a incorporação do conceito de grau de verdade, a teoria dos Conjuntos Fuzzy estende a Teoria dos Conjuntos. Os conjuntos são rotulados qualitativamente (usando termos linguísticos, tais como: alto, morno, ativo, pequeno, perto, etc.) e os elementos deste conjuntos são caracterizados variando o grau de pertinência (valor que indica o grau em que um elemento pertence a um conjunto). Por exemplo, um homem de 1,80 metro e um homem de 1,75 metro são membros do conjunto "alto", embora o homem de 1,80 metro tenha um grau de pertinência maior neste conjunto.

Um conjunto fuzzy é definido, matematicamente, por meio da atribuição de um valor que representa o grau de pertinência ao conjunto de cada indivíduo no universo.

2.2.1.1 Funções de Pertinência

Formalmente um conjunto fuzzy A é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : \mathbf{U} \rightarrow [0,1]$, a qual associa a cada elemento de um universo **U**, um número real no intervalo unitário$[0,1]$. O valor de $\mu_A(x)$ em **U** representa o grau de pertinência de x em A (ZADEH, 2008). Um conjunto fuzzy representa uma coleção de objetos com valores associados entre 0 (exclusão total) e 1 (pertinência total). Neste contexto, os valores associados expressam o grau com o qual cada elemento é compatível com as propriedades que são definidas para o conjunto. O conjunto fuzzy A é representado por um conjunto de pares ordenados: $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

Logo, dado um universo **U** e um elemento particular $x \in \mathbf{U}$, a função de pertinência μ_A estende a função característica C_A em relação ao conjunto $A \subseteq \mathbf{U}$, definida por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A; \end{cases} \tag{2.1}$$

Se $\mu_A(x) = 0$, então x está no complemento de A, $x \in \overline{A} = X - A$.

Um determinado elemento pode pertencer a mais de um conjunto fuzzy, com diferentes graus de pertinência. O conjunto suporte de um conjunto fuzzy A é o subconjunto dos pontos x em U tal que $\mu_A(x) > 0$.

2.2.1.2 Caracterização

A característica especial da Lógica Fuzzy (também referida como lógica nebulosa ou lógica difusa) é a de representar uma forma inovadora de manuseio de informações imprecisas, de forma muito distinta da teoria de probabilidades (SIMÕES; SHAW, 2007). A lógica fuzzy provê um método de traduzir expressões verbais, vagas, imprecisas e qualitativas, comuns na comunicação humana em valores numéricos. Isso abre as portas para se converter a experiência humana em uma forma compreensível pelos sistemas especialistas sendo extensível aos sistemas computacionais (ZADEH, 1975; CARLSSON; FULLER, 2002).

Assim, a tecnologia favorecida pelo enfoque fuzzy tem um imenso valor prático, na qual se torna possível a inclusão da experiência de operadores humanos em controladores computadorizados, possibilitando estratégias de tomadas de decisão em problemas complexos. A lógica fuzzy caracteriza-se por:

- possuir vários modificadores de predicado: muito, mais ou menos, pouco, bastante, médio;
- possuir também um amplo conjunto de quantificadores: poucos, vários, em torno de, usualmente;
- fazer uso das probabilidades linguísticas: provável, improvável, expressões que são interpretadas como números fuzzy e manipuladas pela sua aritmética.
- manusear todos os valores entre 0 e 1, tomando estes, como um limite apenas.

A lógica fuzzy é multivalorada e estende os conceitos da lógica tradicional para os número reais, constituindo numa poderosa ferramenta para tratar palavras ao invés de números.

2.2.1.3 Aplicações da Lógica Fuzzy

A lógica fuzzy tem fundamentado novas técnicas para aproximar a decisão computacional da decisão real. Isto é feito de forma que a decisão de uma máquina não se resuma apenas a um sim ou um não, mas também tenha decisões abstratas, do tipo um pouco mais, talvez sim, e outras tantas variáveis que representem as decisões humanas (BOJADZIEV; BOJADZIEV, 1995).

Entre 1970 e 1980 as aplicações da lógica fuzzy aconteceram com maior importância na Europa e após 1980, o Japão iniciou seu uso com aplicações na indústria. Algumas das primeiras aplicações foram em um tratamento de água feito pela Fuji Electric em 1983 e pela Hitachi em um sistema de metrô inaugurado em 1987. Por volta de 1990, a lógica fuzzy despertou um maior interesse em empresas dos Estados Unidos.

Devido ao desenvolvimento e as inúmeras possibilidades práticas dos sistemas fuzzy e o grande sucesso comercial de suas aplicações, a lógica fuzzy é considerada hoje uma técnica standard e tem uma ampla aceitação na área de controle de processos industriais (LODWICK, 2004; BARROS; BASSANEZI, 2006; BANDO, 2002).

Uma aplicação da lógica fuzzy está no desenvolvimento das Redes Neurais e das técnicas mais recentes de Inteligência Artificial (IA) [1]. (BARBOZA; DIMURO; REISER, 2004; MENDEL, 2007).

[1] expressão utilizada para designar um tipo de inteligência construída pelo homem para dotar a máquina de comportamentos inteligentes

Os primeiros estudos sobre IA surgiram na década de 40, que foi marcada pela II Guerra Mundial. O desenvolvimento do computador, primeiramente impulsionado pela aplicabilidade militar e posteriormente comercial, mostrou-se viável. Seu rápido progresso, desde o surgimento dos primeiros computadores eletrônicos (1943 - Collossus, na Inglaterra e 1946 - ENIAC, nos Estados Unidos) até o surgimento dos microcomputadores (na década de 70) demonstra que essa área recebeu grandes investimentos. A partir da estruturação desse novo campo do conhecimento o fenômeno da inteligência começou a ser pesquisado de forma intensa. Vários esforços foram e têm sido feitos no sentido de simular os tipos de raciocínios utilizados pelo ser humano e implementá-los no computador (MITRA; PAL, 2005). Isso se tornou possível em grande parte graças ao desenvolvimento dos sistemas especialistas, da lógica fuzzy e das redes neurais (MENDOZA; MELIN; LICEA, 2009).

2.3 Matemática Intervalar

Esta seção apresenta um resumo sobre Matemática Intervalar e das principais operações intervalares. Discorre-se ainda, sobre a representação intervalar de funções reais e sua importância para a lógica fuzzy intervalar.

2.3.1 Evolução e Contextualização na Computação Científica

Na computação científica, mesmo quando se utiliza na resolução de um modelo matemático um método que apresenta a solução exata para o modelo, pelo fato de este envolver um número muito grande de operações elementares aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e sendo essas processadas em equipamento com capacidade limitada para armazenar dados, pode-se cometer erros, fazendo com que os cálculos com esses dados produzam resultados imprecisos.

Os erros mais comuns que podem ocorrer na fase de resolução de um problema são os erros de arredondamento e de truncamento. Como a qualidade de um processo computacional depende do controle sobre seu erro, é desenvolvida na década de 60, inicialmente por Moore, uma teoria matemática capaz de resolver esta questão, a aritmética intervalar, que visa dar suporte a problemas computacionais que lidam com a incerteza (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a).

A Matemática Intervalar é uma teoria introduzida com o objetivo de automatizar a análise de erro computacional. Ela trata de dados na forma de intervalos numéricos, buscando controlar os limites de erro dos processos de desenvolvimento de métodos operacionais construtivos (Matemática Numérica) para a resolução aproximada de problemas que podem ser representados por um modelo matemático exato e eficiente. Neste contexto vem contribuindo para a máxima economia e confiabilidade em termos dos fatores envolvidos, como tempo de execução, memória e erros de arredondamento e de truncamento (CLAUDIO; MARINS, 1989).

Os números representados como intervalos servem como controladores da propagação do erro, uma vez que garantem que a resposta correta de determinado problema pertence ao intervalo obtido (KEAFORT; KREINOVICH, 1996; BEDREGAL; DIMURO; REISER, 2009).

Os intervalos, na computação científica, podem ser aplicados para representar valores desconhecidos e, também, para representar valores contínuos (números reais). Servem para controlar o erro de arredondamento e para representar dados inexatos, aproximações e erros de truncamento de procedimentos (DESCHRIJVER; KERRE, 2005; MENDOZA; MELIN; LICEA, 2009; RUMP, 1999).

Os primeiros pesquisadores a utilizarem uma forma de Aritmética Intervalar para descrever resultados foram Burkill, 1924 e Young, em 1931 e os primeiros registros de trabalhos independentes nessa área devem-se a P.S. Dwyer, M.Warmus, T. Sunaga e Ramon E. Moore (MOORE, 1962; DWYER, 1951). Mas quem consolidou a Aritmética Intervalar foi Moore, com publicações de artigos e em especial com a sua monografia, em 1966. Seu trabalho despertou a comunidade científica para aplicação da Matemática Intervalar como uma área de pesquisa computacional.

Atualmente, a Matemática Intervalar vem sendo empregada na elaboração de algoritmos numéricos auto-validáveis e com controle automático de erro. Sem o uso de intervalos, a validação da aritmética através do controle do erro é praticamente impossível em computação científica.

A necessidade do uso de intervalos para controle do erro numérico em computação científica é um fato conhecido entre pesquisadores e a implementação do tipo intervalo em linguagens, desenvolvimento de algoritmos e métodos intervalares têm sido uma frutífera área de pesquisa (ALSINA; TRILLAS; VALVERDE, 1980).

O interesse de se ter uma teoria consistente e mais precisa é que surgiu a análise de intervalos, uma teoria matemática com origem na década de 60, (MOORE, 1979a). Leslie Fox, em 1974, nas suas pesquisas propõe um avanço desta teoria integrando áreas como análise intervalar, topologia intervalar, álgebra intervalar, lógica intevalar e outras. Os algoritmos intervalares, em contraste com os algoritmos pontuais, computam um intervalo como solução, com a garantia de que a resposta pertence a este intervalo.

A vantagem do uso da aritmética intervalar aparece principalmente em problemas onde a instabilidade numérica (decorrente do uso da aritmética de ponto flutuante e da natureza dos problemas) é crítica (ACIÓLY, 1991; MOORE, 1962).

O benefício é resultante da forma como os números reais são representados (um intervalo de pontos flutuantes que contém o número real) e do fato de que os cálculos produzem um intervalo que, com certeza, contém o resultado real (MOORE, 1966). Ou seja, o uso da Matemática Intervalar permite um controle de erros com limites confiáveis, além de provas de existência da solução de diversas equações.

A desvantagem decorrente da complexidade de cálculo das operações intervalares é compensada pela segurança e qualidade do resultado e pela aceleração decorrente da exploração do paralelismo das operações intervalares em arquiteturas multiprocessadas.

A computação consiste numa seqüência finita de operações, no entanto a solução exata de um problema, em muitos casos, requer uma seqüência infinita de operações aritméticas exatas. Isto tem motivado a investir a aplicação da Aritmética Intervalar na solução desses problemas, pois desta forma, torna-se viável o controle automático e rigoroso sobre os erros, como também nos possibilita o tratamento e modelagem da incerteza em computação (JAULIN et al., 2001).

2.3.2 Noções Básicas da Matemática Intervalar

Esta seção descreve as noções básicas sobre intervalos para o desenvolvimento deste trabalho, estudos mais detalhados desta teoria podem ser encontrados em (MOORE, 1962, 1979a; ACIÓLY, 1991; CLAUDIO; MARINS, 1989).

Um intervalo de números reais é um subconjunto de números reais, contínuo, limitado, tendo uma representação na forma:

$$X = [x_1, x_2] = \{x \in \mathbf{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\} \tag{2.2}$$

onde $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, tal que $x_1 \leq x_2$ e sendo $\mathbf{R}$ o conjunto dos números reais.

Denota-se por $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os intervalos reais, ou seja:

$$\mathbb{R} = \{[x_1, x_2] \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \leq x_2\} \tag{2.3}$$

e o conjunto de todos os intervalos de reais restrito ao intervalo unitário $U = [0, 1]$ por $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{U} = \{[x_1, x_2] \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}, 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

As **funções de projeção** associadas ao intervalo X, denotadas por l e r, $l, r : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$, são definidas por:

$$l(X) = l([x_1, x_2]) = x_1 = \underline{X} \;\; e \;\; r(X) = r([x_1, x_2]) = x_2 = \overline{X} \tag{2.5}$$

As seguintes **Relações de Ordem** são consideradas relevantes para o desenvolvimento deste trabalho:

- **Ordem do Produto**: $X \leq Y \Leftrightarrow \underline{X} \leq \underline{Y}$ e $\overline{X} \leq \overline{Y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{U}$
- **Ordem da Inclusão**: $X \subseteq Y \Leftrightarrow \underline{X} \geq \underline{Y}$ e $\overline{X} \leq \overline{Y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{U}$

2.3.3 Operações sobre intervalos

Sejam $X, Y \in \mathbb{U}$, as operações aritméticas e transcendentes com intervalos são executadas sobre os extremos de seus intervalos. No contexto deste trabalho, consideram-se as seguintes operações:

1. **Operações aritméticas em** $\mathbb{U}^2$:

   - **Soma**: $X + Y = [(\underline{X} + \underline{Y}); (\overline{X} + \overline{Y})]$
   - **Pseudo inverso aditivo**: $-X = [-\overline{X}; -\underline{X}]$
   - **Subtração**: $X - Y = X + (-Y) = [(\underline{X} - \overline{Y}); (\overline{X} - \underline{Y})]$
   - **Multiplicação**:
     $X * Y = [min(\underline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \overline{Y}, \overline{X} * \underline{Y}, \overline{X} * \overline{Y}); max(\underline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \overline{Y}, \overline{X} * \underline{Y}, \overline{X} * \overline{Y})]$
   - **Divisão**:
     $X/Y = [min(\underline{X}/\overline{Y}, \underline{X}/\underline{Y}, \overline{X}/\overline{Y}, \overline{X}/\underline{Y}); max(\underline{X}/\overline{Y}, \underline{X}/\underline{Y}, \overline{X}/\overline{Y}, \overline{X}/\underline{Y})]$, com $0 \notin [\underline{Y}, \overline{Y}]$, ou seja, assume-se que o $0 \notin Y$ para que a operação esteja bem definida.

2. **Operações transcendentes em** $\mathbb{U}$

   - **Exponencial**: $\exp(X) = e([\underline{X}, \overline{X}]) = [e^{\underline{X}}, e^{\overline{X}}]$
   - **Logarítmica**: $\ln([\underline{X}, \overline{X}]) = [\ln(\underline{X}), \ln(\overline{X})]$ onde $\underline{X} > 0$
   - **Potenciação**: $X^n = (\underline{X}^n, \overline{X}^n) \;\; e \;\; X^0 = [1, 1]$.

- **Radiciação**: $\sqrt{x} = [\sqrt{\underline{X}}, \sqrt{\overline{X}}]$

Proposição 1. *Sejam X, Y e $Z \in \mathbb{R}$, então as seguintes propriedades algébricas da adição em $\mathbb{R}$ são satisfeitas:*

- ***Fechamento**: Se $X \in \mathbb{R}$ e $Y \in \mathbb{R}$ então $X + Y \in \mathbb{R}$;*
- ***Associatividade**: $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$;*
- ***Comutatividade**: $X + Y = Y + X$;*
- ***Elemento Neutro**: $\exists! \boldsymbol{0} = [0; 0] \in \mathbb{R} \mid X + [0, 0] = [0, 0] + X = X$.*

Proposição 2. *Sejam X, Y e $Z \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades algébricas da multiplicação em $\mathbb{R}$:*

- ***Fechamento**: Se $X \in \mathbb{R}$ e $Y \in \mathbb{R}$ então $X.Y \in \mathbb{R}$;*
- ***Associatividade**: $X.(Y.Z) = (X.Y).Z$;*
- ***Comutatividade**: $X.Y = Y.X$;*
- ***Elemento Neutro**: $\exists! \boldsymbol{1} = [1; 1] \in \mathbb{R}$ tal que $X.[1, 1] = [1, 1].X = X$;*
- ***Subdistributividade**: $X.(Y + Z) \subseteq (X.Y) + (X.Z)$.*

2.3.3.1 Intersecção e União entre Intervalos

Definição 1. ***União entre Intervalos** Sejam $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ dois intervalos tais que $X \cap Y \neq \emptyset$. Define-se a união dos intervalos X e Y como sendo o intervalo $X \cup Y = [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}; max\{\overline{X}, \overline{Y}\}]$,*

Definição 2. ***Intersecção entre Intervalos**: Sejam $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ dois intervalos. Define-se a intersecção dos intervalos X e Y como sendo o intervalo $X \cap Y = [\max\{\underline{X}, \underline{Y}\}; \min\{\overline{X}, \overline{Y}\}]$, se $\max\{\underline{X}, \underline{Y}\} \leq \min\{\overline{X}, \overline{Y}\}$. Se $\min\{\overline{X}, \overline{Y}\} < \max\{\underline{X}, \underline{Y}\}$ então $X \cap Y = \emptyset$.*

2.3.4 Representação Canônica Intervalar

Esta seção tem como objetivo apresentar o estudo referente à representação canônica intervalar, a qual será aplicado à definição dos conectivos da lógica fuzzy intervalar (MOORE, 1979b; SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2006; ACIóLY; BEDREGAL, 1997; CAPRANI; MADSEN; STAUNING, 1997; ALEFELD; HERZBERGER, 1983; ANGUELOV; MARKOV; SENDOV, 2006; BEDREGAL; SANTIAGO, 2007; SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2005; ACIÓLY, 1991).

Definição 3. ***Representação Intervalar**: Considere o intervalo real unitário $U = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Seja $\mathbb{U}$ o conjunto dos subintervalos de U, isto é $\mathbb{U} = \{[\underline{X}, \overline{X}] \mid 0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} \leq 1\}$.*

Um intervalo $X \in \mathbb{U}$ é dito ser uma representação intervalar de um número real α se $\alpha \in X$. Considerando-se duas representações intervalares X *e* Y *de um número real α,* X *é dito uma melhor representação de α que* Y *se* X *é mais restrito do que* Y, *ou seja, se $X \subseteq Y$. Este conceito pode ser facilmente estendido para* tuplas *de n intervalos $\vec{X} = (X_1, ..., X_n) \in \mathbb{U}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ (BEDREGAL et al., 2007b).*

Definição 4. ***Função Intervalar***: *Seja $F : X \to Y$ uma função. Se o domínio e o contra-domínio de F são $X = D(F) \subseteq \mathbb{R}$ e $Y = CD(F) \subseteq \mathbb{R}$, respectivamente, diz-se que F é uma função intervalar de uma variável intervalar.*

Definição 5. ***Inclusão Monotônica***: *Uma função intervalar F de variáveis $X_1, X_2, ..., X_n$ é uma inclusão monotônica se, $\forall_i$, $1 \leq i \leq n$,*

$$Y_i \subseteq X_i \Rightarrow F(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \subseteq F(X_1, X_2, ..., X_n) \tag{2.6}$$

A Equação 2.6 descreve uma das principais propriedades da aritmética de Moore, a inclusão monotônica, assegurando a corretude dos resultados intervalares e a inclusão do erro.

Definição 6. ***Inclusão Intervalar***: *Dado $x \in \mathbb{R}$, diz-se que $X \in \mathbb{R}$ é uma representação de x se $x \in X$.*

Definição 7. ***Representação Intervalar***:*(cf. (SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2006)) A função $F : \mathbb{U}^n \to \mathbb{U}$ é uma representação intervalar de uma função $f : U^n \to U$ se, para cada $\vec{X} \in \mathbb{U}^n$ e $\vec{x} \in \vec{X}$, $f(\vec{x}) \in F(\vec{X})$.*

Uma função intervalar pode ser vista como uma representação de um subconjunto de números reais. Assim, estendendo a definição anterior, uma função intervalar $F : \mathbb{U}^n \to \mathbb{U}$ é uma *melhor representação intervalar* da função $f : U^n \to U$ do que $G : \mathbb{U}^n \to \mathbb{U}$, denotada por $G \sqsubseteq F$, se para cada $\vec{X} \in \mathbb{U}^n$, a inclusão $F(\vec{X}) \subseteq G(\vec{X})$ está garantida.

Definição 8. ***Melhor Representação Intervalar*** *(Representação Canônica Intervalar - CIR): (cf. (SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2006)) Para cada função real $f : U^n \to U$, a melhor representação intervalar é a função intervalar $\widehat{f} : \mathbb{U}^n \to \mathbb{U}$ é definida por*

$$\widehat{f}(\vec{X}) = [inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\}; sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \vec{X}\}]. \tag{2.7}$$

A função intervalar $\widehat{f}$ está bem definida e para qualquer outro tipo de representação intervalar F de f, $F \sqsubseteq \widehat{f}$. A função intervalar $\widehat{f}$ retorna um intervalo menor do que qualquer outra representação intervalar de f. Portanto, a função $\widehat{f}$ satisfaz a propriedade de optimalidade mencionada por Hickey em (HICKEY; JU; EMDEM, 2001), quando ela é vista como um algoritmo para calcular uma função real f.

Proposição 3. *(SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2006) Seja $f : \mathbb{U}^n \to \mathbb{U}$ uma função total e não assintótica[2]. Então para todo $\vec{X} \in \mathbb{U}^n$ e $\vec{x} \in \vec{X}$ temos que $f(\vec{x}) \in \widehat{f}(\vec{X})$.*

Com a Proposição 3, vemos que $\widehat{f}$ é uma representação intervalar de f.

Corolário 1. *Inclusão do CIR e a aritmética intervalar: Seja $f : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ uma das operações aritméticas em $\mathbb{U}$, $\vec{X} \in \mathbb{U}^2$ e $\vec{x} \in \vec{X}$. Então $f(\vec{x}) \in \widehat{f}(\vec{X})$.*

O principal resultado em (SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2006) pode ser restrito ao contexto deste estudo, isto é, para U^n em vez de $\mathbb{R}$, como mostra o seguinte:

[2]Uma função real f é dita assintótica se para um dado intervalo X o conjunto $\{f(a) : \underline{X} < a < \overline{X}\}$ não tem o menor elemento ou o maior elemento.

Teorema 1. *(BEDREGAL et al., 2007)[Theorem 2.3] Seja $f : U^n \rightarrow U$ uma função real. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) f é contínua; (ii) $\widehat{f}$ é contínua para Scott; (iii) $\widehat{f}$ é contínua para Moore.

A continuidade de Scott e Moore são as duas noções de continuidade mais utilizadas na matemática intervalar (SANTIAGO; BEDREGAL; ACIóLY, 2006).

Uma função intervalar $F : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}$ é preservada para intervalos degenerados quando, para cada $x_1, ..., x_n \in U$, existe $y \in U$ tal que $F([x_1, x_1], ..., [x_n, x_n]) = [y, y]$. Note que, para cada função $f : U^n \rightarrow U$, a função intervalar $\widehat{f}$ é preservada para o intervalo degenerado.

2.4 Lógica Fuzzy Valorada Intervalarmente

Generalizando a teoria dos conjuntos fuzzy, o conceito de um conjunto fuzzy do tipo-2 foi introduzido por Zadeh (ZADEH, 1975) como uma extensão do conceito de conjunto fuzzy normal, denominado conjunto fuzzy do tipo-1. Esta seção apresenta as principais idéias que consolidaram esta generalização, relacionadas a extensão da função de pertinência. Ou seja, a imagem da função de pertinência restrita a conjuntos crisp no caso da lógica fuzzy baseada em conjuntos fuzzy do tipo-1, é estendida, considerando o mapeamento sobre subconjuntos do intervalo unitário.

Neste novo contexto, o grau de pertinência associando a um elemento pode ser valorado por conjuntos fuzzy. Em particular, tem-se as funções de pertinência valoradas intervalarmente (MOORE; LODWICK, 2003), e na sequência, o correspondente estudo dos conectivos da lógica fuzzy valorada intervalarmente.

2.4.1 O Problema da Lógica Fuzzy

Embora a lógica fuzzy seja referida como a linguagem das proposições vagas, a imagem da função de pertinência como um subconjunto do intervalo unitário $[0, 1]$ considera valores ainda muito precisos.

A lógica fuzzy considera as funções de pertinência com características próprias de conjuntos fuzzy do tipo-1; eles são muito úteis em situações onde é fácil determinar uma função de pertinência exata para um conjunto fuzzy, e neste sentido, importantes para incorporar este tipo de incerteza.

Entretanto, muitas vezes, o conhecimento usado para construir regras de sistema baseados na lógica fuzzy é incerto. Essa incerteza leva a regras com antecedentes e/ou conseqüentes incertos, as quais se traduzem em imagens obtidas a partir das correspondentes funções de pertinência.

A modelagem destas incertezas é relevante quando, por exemplo, as regras são coletadas por meio de levantamento de diversos peritos ou especialistas. Primeiramente, consultam-se especialistas sobre os localizações e extensões (expansões) dos conjuntos difusos associados com os termos que compõem o antecedente e consequente quando da estruturação de uma regra. Na sequência, muito provavelmente, obtém-se diferentes respostas de cada especialista.

Além disso, frequentemente, os especialistas dão diferentes respostas para a mesma pergunta, o que resulta em regras que associam a seus antecedentes diferentes consequentes. Nesse caso, a possibilidade de representar a saída do sistema construído a partir destas regras como um conjunto fuzzy, em substituição de um número crisp, pode ser alcançada dentro da lógica fuzzy do tipo tipo-2.

2.4.2 Conjunto Fuzzy do Tipo-2

Segundo Mendel (MENDEL, 2007, 2001), conjuntos fuzzy do tipo-2 permitem lidar com as incertezas linguísticas, considerando que as palavras podem significar coisas diferentes para pessoas diferentes.

Uma relação fuzzy do tipo-2 tem sido considerada como uma forma de aumentar a possibilidade de representação da imprecisão de uma relação fuzzy. No contexto deste trabalho, aumentar a descrição da imprecisão significa maior capacidade para lidar com informações inexatas de uma forma lógica correta. Assim, a teoria dos conjuntos fuzzy do tipo-2 permite graus de acordo com a linguística usada pela sociedade, auxiliando na representação de conhecimento e oferecendo vantagem na estrutura lógica para inferência.

Nos últimos anos, evidenciam-se os estudos relacionadas aos conjuntos fuzzy do tipo-2 da lógica fuzzy, tornando mais ativo e com aplicações em áreas como a computação com as palavras, paradigma clássico de conjuntos fuzzy.

A generalização da lógica fuzzy do tipo-2 tem uma grande utilidade uma vez que essa lógica considera valores verdade que são conjuntos fuzzy. Isto significa que a cada elemento está associado um grau de pertinência fuzzy (o qual corresponde a mais de um elemento em $U = [0, 1]$). Este mapeamento, quando estendido sobre $\mathbb{U}$, denomina-se valor de verdade fuzzy (NGUYEN; KREINOVICH; ZUO, 1997).

A recente popularidade da lógica fuzzy do tipo-2 decorre, principalmente, dos trabalhos do grupo Mendel et al (MENDEL, 2007, 2001). Além de inúmeros artigos, salientam-se muitas contribuições na linha teórica de pesquisa e na lógica fuzzy estrita.

A teoria dos conjuntos fuzzy do tipo tipo-2, proposta por Zadeh (ZADEH, 1975), tem tido várias e significativas contribuições:

1. O grupo Deschrijver et al, (GASSE et al., 2006; DESCHRIJVER; KERRE, 2005; DESCHRIJVER, 2007, 2008) tem pesquisado o relacionamento entre conjuntos fuzzy intuicionistas, conjutos L-fuzzy, conjuntos fuzzy valorados intervalarmente e conjuntos fuzzy intuicionistas valorados intervalarmente.

2. Noções fundamentais de lógica multivalorada incluem também alguns dos principais desafios para caracterização de propriedades lógicas e algébricas de conjuntos fuzzy do tipo-2 (GOTTWALD, 2001; GOTTWALD; HAJEK, 2005; HICKEY; JU; EMDEM, 2001; STADTHERR et al., 2007).

3. Um criterioso estudo da análise intervalar fuzzy é considerado por Dubois, Prade e Sessa (DUBOIS; PRADE, 1991, 2005, 1991; DUBOIS; PRADE; SESSA, 2009), apresentando contribuições e aplicação na IA a partir do raciocínio baseado em casos.

4. Em (HU et al., 2008; KREINOVICH; MUKAIDONO, 2000; TURKSEN, 1986; YAM; MUKAIDONO; KREINOVICH, 1999), tem-se a ênfase no estudo do processamento do conhecimento a partir da computação intervalar e da *soft computing*, considerando também importante contribuição deste grupo na busca de axiomatização das implicações fuzzy.

5. Zsolt Gera et al. apresenta, nos trabalhos (GEHRKE; WALKER; WALKER, 1996, 1999; NGUYEN; WALKER, 1999; GEHRKE; WALKER; WALKER, 2003), o estudo de álgebras para funções de agregação e funções de implicação, generalizando a definição de implicações do tipo-1 e estendendo S-implicações e coimplicações para operadores do tipo-2, incluindo as extensões das implicações residuais.

6. Em (GORZALCZANY, 1987; GRATTAN-GUINESS, 1976), considera-se a inferência no raciocínio aproximativo, também com base nos conjuntos fuzzy valorados intervalarmente.

7. Outros trabalhos, mais recentemente, estão focados no estudo estrito dos conectivos lógica fuzzy intervalar são desenvolvidos integrando esforços dos grupos de pesquisa GMFC/UCPel e UFRN/LoLITA (BEDREGAL et al., 2010; BEDREGAL, 2009; BEDREGAL; TAKAHASHI, 2007; BEDREGAL, 2009; BEDREGAL et al., 2010; REISER et al., 2008, 2007; BEDREGAL et al., 2007c; DIMURO et al., 2008; BEDREGAL; DIMURO; REISER, 2009; DIMURO et al., 2008; REISER et al., 2008; BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009b).

Estes estudos, descritos nos últimos parágrafos, consideram t-normas, t-conormas, complementos fuzzy sendo avaliados conjuntos fuzzy do tipo-2 ou conjuntos fuzzy valorados intervalarmente, incluindo forma normal, convexa, triangular, funções trapezoidal e outras classificações. Estes conectivos são a estruturação básica para o processo de inferência, considerando principalmente as implicações fuzzy, mas incluindo investigação para as extensões das coimplicações e outras relações fuzzy, como as regras Modus Ponens e Modus Tolens.

O estudo formal, desenvolvimento e aplicação de sistemas baseada nas implicações do tipo-2 não é tarefa simples, pois nem todas as propriedades de conjuntos fuzzy do tipo-1, na definição de uma implicação fuzzy, se aplicam a correspondente extensão.

2.4.2.1 Função de Pertinência Baseada em Conjuntos Fuzzy do Tipo-2

A estrutura de regra condicional fuzzy, onde $\mathbf{U} = [0,1]$, $\mathbb{U}$ o conjunto de todos os conjuntos fuzzy e $X, Y \in \mathbb{U}$ são conjuntos fuzzy (finitos) não-vazios (KARNIK; MENDEL, 2001) pode ser descrita pela expressão:

$$r_2 : \text{se X está em } \widetilde{A} \text{ então Y está em } \widetilde{B} \tag{2.8}$$

onde $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ são conjuntos fuzzy do tipo-2, os quais são definidos por pares, dados pelo elemento e seu correspondente grau de pertinência que é um conjunto fuzzy do tipo-1:

$$\widetilde{A} = \{((x,u),(\mu_{\widetilde{A}}(x,u))) \mid x \in X, u \in J_x\} \text{ e } \widetilde{B} = \{((y,v),\mu_{\widetilde{B}}(y,v)) \mid y \in Y, v \in J_y\}.$$

Neste contexto, para todo $x \in X, y \in Y$ e $u \in J_x \subseteq [0,1], v \subseteq J_y \in [0,1]$, tem-se que:

(i) a função de pertinência $\mu_{\widetilde{A}}$ do conjunto $\widetilde{A}$, $\mu_{\widetilde{A}} : X \to \mathbb{U}$, mapeia (x,u) na imagem $\mu_{\widetilde{A}}(x,u)$; e de forma análoga,

(ii) a função de pertinência $\mu_{\widetilde{B}}$ do conjunto $\widetilde{B}$, $\mu_{\widetilde{B}} : Y \to \mathbb{U}$, mapeia (y,v) na imagem $\mu_{\widetilde{B}}(y,v)$.

Quando $\mu_{\widetilde{A}}(x, u) = 1$, $\widetilde{A}$ é um caso particular de conjuntos fuzzy do tipo-2, denominado conjunto fuzzy valorado intervalarmente (GERA; DOMBI, 2008).

O uso de uma função de pertinência do tipo-2 na modelagem de incerteza se justifica quando, por exemplo, na construção de sistema fuzzy para controle de trânsito onde se deve considerar mais de um especialista. Neste exemplo, pode-se definir diferentes graus de pertinência para a mesma variável, considerando todas as opiniões de todos os especialistas. Frequentemente, opta-se pelo caso particularmente mais simples de conjuntos fuzzy do tipo-2, os conjuntos fuzzy valorados intervalarmente, e as regras de inferência podem ser obtidas a partir das implicações fuzzy intervalares.

Na determinação da função de pertinência do tipo-2 consideram-se duas funções do tipo-1: $FPS, FPU : X \rightarrow U$, denominadas função de pertinência superior e inferior, respectivamente, limitando superior e inferiormente o grau (conjunto fuzzy) de cada elemento no domínio do conjunto $X \subseteq U$. A incerteza no domínio de uma função de pertinência do tipo-2 consiste numa região limitada, denominada *footprint of uncertainty* (FOU), mostrando uma descrição completa da função de pertinência $\mu_{\widetilde{A}}(x, u)$, a qual em muitos casos coincide com o domínio de incerteza (DOU) de $\widetilde{A}$ (MENDEL; JOHN; LIU, 2006).

A representação gráfica tridimensional para o grau de pertinência em um sistema baseado na lógica fuzzy do tipo-2 pode ser simplificada, conforme mostra a Figura 2.1, apresentando um exemplo de função de pertinência do tipo-2 considerando o plano $x - u$.

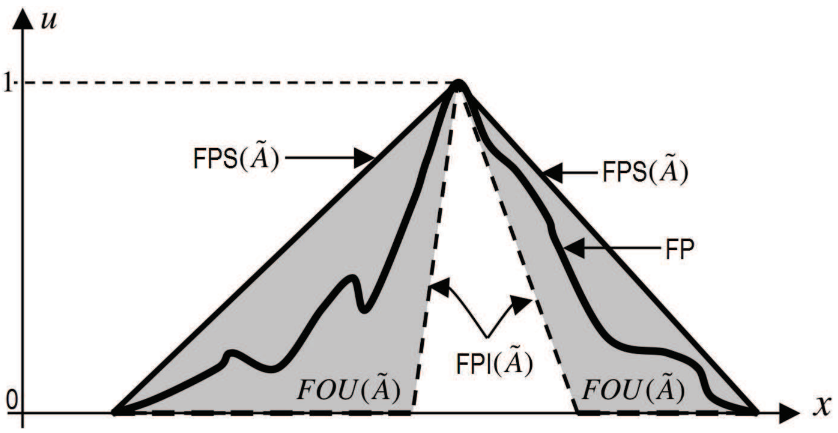

Figura 2.1: Função de pertinência do tipo-2 (MENDEL; JOHN; LIU, 2006).

Sejam $FPS, FPU : X \rightarrow U$ funções contínuas, com $FPS(x) \leq FPU(x)$, para todo $x \in X$. O grau de pertinência intervalar de um elemento x em X, no conjunto fuzzy valorado intervalarmente $\widetilde{A}$ pode ser dado pela expressão $[FPS(x), FPU(x)]$, para todo $x \in X$.

2.4.2.2 Sistemas Baseados em Conjuntos Fuzzy do Tipo-2

Em um conjunto fuzzy do tipo-1 o grau de pertinência é um número crisp; em um conjunto fuzzy tipo-2 o grau de pertinência é um conjunto fuzzy do tipo-1. Nesta sessão, centra-se apenas sobre as semelhanças e diferenças entre os dois sistemas.

A Figura 2.2 mostra a estrutura de um sistema fuzzy do tipo-2, muito similar a estrutura de um sistema do tipo-1.

A fuzzyficação mapeia uma entrada crisp em um conjunto fuzzy do tipo-2. No caso de sistemas fuzzy do tipo-1, geralmente temos regras condicionais como na Ex-

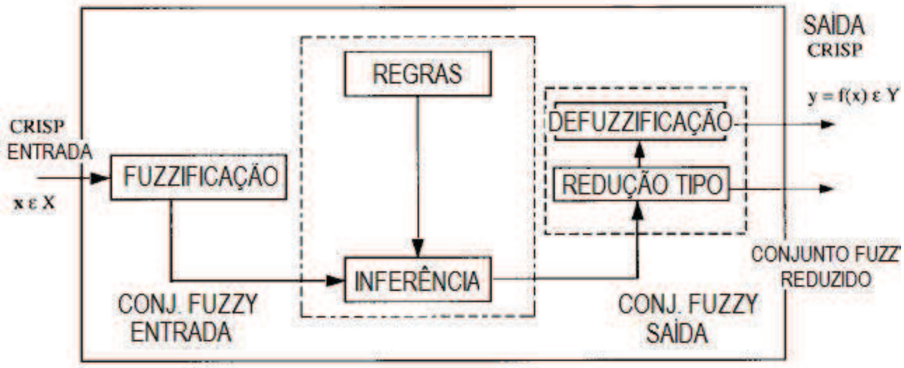

Figura 2.2: Sistema baseado em lógica fuzzy do tipo-2 (KARNIK; MENDEL; LIANG, 1999)

pressão (1.3). A distinção entre estes sistemas está na natureza das funções de pertinência do tipo-1 e do tipo-2. A principal diferença é que no segundo caso, tem-se conjuntos fuzzy do tipo-2 envolvidos nas expressões dos antecedentes e/ou consequentes.

Em sistemas fuzzy do tipo-2, o motor de inferência combina regras mapeando entradas de conjuntos fuzzy (do tipo-1 ou do tipo-2) para a saída também dada por conjuntos fuzzy. Para fazer isso é preciso considerar as intersecções como bem como composições de relações de conjuntos fuzzy do tipo-2.

A defuzificação é um procedimento simples, considerando o processo de redução de tipo, sendo que o processamento de saída contém apenas o defuzzificador tendo como entrada um conjunto fuzzy e saída crisp. Este conjunto fuzzy pode, em geral, ser um tipo-2. Em um sistema fuzzy do tipo-1, o defuzzificador produz uma saída crisp a partir do conjunto fuzzy que é a saída do motor de inferência, isto é, um tipo-0 (Crisp). Em sistemas fuzzy do tipo-2, a saída do motor de inferência é um conjunto fuzzy do tipo-2, deste modo, tem-se versões estendidas dos métodos do tipo-1 na defuzzificação. Esta defuzzificação estendida considera uma redução de tipos, oferecendo como saída um conjunto fuzzy do tipo-1, que na sequência resulta em um dados crisp. A maneira mais natural de fazer isso parece ser encontrando o centróide do tipo reduzido, no entanto, existem outras possibilidades (KARNIK; MENDEL; LIANG, 1999). .

A partir de nossas discussões, para desenvolver sistemas fuzzy do tipo-2, deve-se considerar as etapas:

- executar o conjunto de operações: união, intersecção e complemento definidas para funções do tipo-2;

- conhecer as propriedades (por exemplo, comutatividade, associatividade, as leis de identidade) para funções de grau de pertinência para conjuntos do tipo-2 (KARNIK; MENDEL, 2001);

- analisar as operações com conjuntos fuzzy do tipo-2, as relações fuzzy e suas composições;

- realizar a redução de tipo e a defuzzificação para obter um conjunto de saída crisp usando o sistema de inferência para conjuntos do tipo-2.

2.5 Considerações Finais

A lógica fuzzy valorada intervalarmente surgiu em 1975 com contribuições independentes de vários autores, visando o tratamento da incerteza no grau de pertinência. Neste sentido, as extensões intervalares dos conetivos fuzzy têm sido largamente estudadas.

Em matemática intervalar, o princípio da corretude consiste na garantia de que, na computação de um algoritmo, a saída intervalar contém todos os possíveis resultados pontuais correspondentes aos dados pontuais referentes à entrada intervalar. E, o princípio da optimalidade, determina que a saída intervalar seja a menor possível satisfazendo a corretude. Assim, a corretude é a condição mínima enquanto que a optimalidade é a condição ideal a ser satisfeita por computações intervalares. Em particular, mostra-se que implicações fuzzy intervalarmente valoradas são representações de implicações fuzzy satisfazendo estes dois princípios.

A proposta deste trabalho para lógica fuzzy intervalarmente valorada é considerar as construções fuzzy intervalares como construções fuzzy que são corretas e analisar critérios que garantam optimalidade. Neste contexto, tem-se por objetivo contribuir no estudo das principais classes de implicações fuzzy valoradas intervalarmente, analisando a satisfação de propriedades análogas às respectivas classes de implicações fuzzy valoradas pontualmente. Para tal, nos próximos capítulos propõe-se um estudo de classificação para as implicações fuzzy valoradas intervalarmente, cujas classes são diferenciadas por sua estruturação axiomatica que é determinada pelo estudo de propriedades lógicas e algébricas.

O próximo capítulo considera o estudo das funções de agregação (t-normas e t-conormas) e das negações fuzzy como fundamentação para no capítulo subsequente apresentar a correspondente extensão intervalar baseada na representação canônica intervalar.

3 AGREGADORES E NEGAÇÕES DA LÓGICA FUZZY

A maioria dos operadores de implicação fuzzy podem ser definidas a partir de operadores de agregação e negação fuzzy. As normas triangulares e suas construções duais (conormas triangulares), ou simplesmente t-normas (t-conormas), foram simultaneamente introduzidas em (MENGER, 1942) e (SCHWEIZER; SKLAR, 1961). Estes trabalhos deram uma axiomatização para as normas (conormas) triangulares, estendendo os conectivos proposicionais clássicos para o conjunto [0,1] e preservando suas propriedades lógicas. As noções intuitivas de t-normas e t-conormas foram modeladas à partir dos conectivos de conjunção e disjunção, respectivamente.

A axiomatização dos principais conectivos proposicionais fuzzy obtidos através desses agregadores, mostram uma ligação forte entre esses conectivos proposicionais fuzzy, sendo possível obter uma implicação fuzzy à partir de uma t- norma, ou uma negação fuzzy à partir de uma implicação (FODOR, 1995). Várias generalizações de normas triangulares são encontradas na literatura (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000),(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a),(DESCHRIJVER, 2008),(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2007),(TAKAHASH; BEDREGAL, 2006),(BUTINARIU; E.P., 1993), (KLEMENT; NAVARA, 1999), e estas referências foram consideradas na organização deste capítulo.

3.1 Normas e Conormas Triangulares

Esta seção apresenta a definição de norma triangular e conorma triangular e considera também os exemplos mais referenciados na literatura, incluindo as classificações referentes à continuidade e a análise com respeito à relação de dualidade. Automorfismo atuando sobre t-normas e t-conormas são estudados, mostrando ainda que estes operadores preservam propriedades importantes destas funções de agregação e de negação.

3.1.1 Norma Triangular

Definição 9. *Seja o intervalo unitário real* $\mathbf{U} = [0,1] \subseteq \mathbf{R}$. *Uma norma triangular, conhecida como t-norma, é uma operação binária* $T : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$ *que,*$\forall x, y, z \in \mathbf{U}$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

T_1 *Comutatividade:* $T(x, y) = T(y, x)$*;*

T_2 *Associatividade:* $T(x(T(y, z)) = T(T(x, y), z)$*;*

T_3 *Elemento Neutro:* $T(x,1) = x$;

T_4 *Monotonicidade:* $T(x,y) \leq T(x,z)$ *se* $y \leq z$.

Uma t-norma é utilizada geralmente para representar o operador de conjunção (e) ou a intersecção entre conjuntos fuzzy.

Proposição 4. *A função* $T_M : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$*,* $T_M(x,y) = \min(x,y)$ *é uma t-norma, denominada* ***norma triangular do mínimo****.*

Prova. *Sejam* $T_M(x,y) = \min(x,y)$ *e* $x,y,z \in U$*. Tem-se que:*
(i) T_M *é comutativa:* $T_M(x,y) = \min(x,y) = \min(y,x) = T_M(y,x)$

(ii) T_M *é associativa:*

$$\begin{aligned} T_M(x, T_M(y,z)) &= \min(x, T_M(y,z)) \\ &= \min(x, \min(y,z)) \\ &= \min(\min(x,y), z)) \\ &= \min(T_M(x,y), z) = T_M(T_M(x,y), z) \end{aligned}$$

(iii) T_M *satisfaz a propriedade do elemento neutro:* $T_M(x,1) = \min(x,1) = x$

(iv) T_M *é monotônica:* $y \leq z \rightarrow \min(x,y) \leq \min(x,z) \rightarrow T_M(x,y) \leq T_M(x,z)$

Logo T_M ***é uma t-norma.***

A Figura 3.1 mostra a representação da t-norma triangular do mínimo.

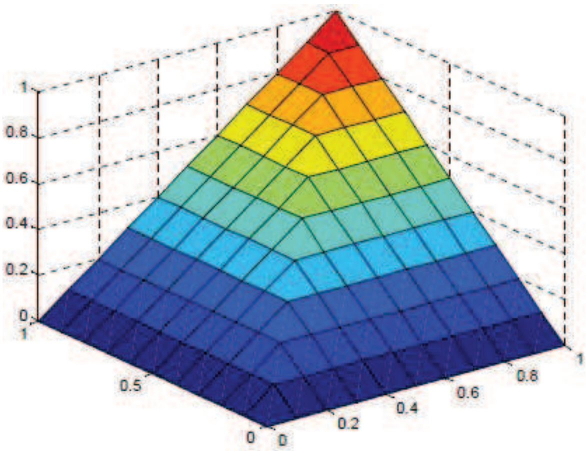

Figura 3.1: t-norma triangular do mínimo (intersecção).

Proposição 5. *A função* $T_P : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$*,* $T_P(x,y) = x.y$ *é uma t-norma, denominada* ***norma triangular produto*** .

Prova. *Sejam* $T_P(x,y) = x.y$ *e* $x,y,z \in U$*. Tem-se que:*
(i) T_P *é comutativa:* $T_P(x,y) = x.y = y.x = T_P(y,x)$

(ii) T_P é associativa:

$$\begin{aligned} T_P(x, T_P(y,z)) &= T_P(x, y.z)) \\ &= x.(y.z) \\ &= (x.y).z) \\ &= (T_P(x,y).z) = T_P(T_P(x,y).z) \end{aligned}$$

(iii) T_P satisfaz a propriedade do elemento neutro: $T_P(x,1) = x.1 = x$

(iv) T_P é monotônica: $y \leq z \rightarrow \quad x.y \leq x.z \rightarrow T_P(x,y) \leq (T_P(x,z)$

Logo T_P é uma t-norma.

A Figura 3.2 mostra a representação gráfica da t-norma do produto algébrico.

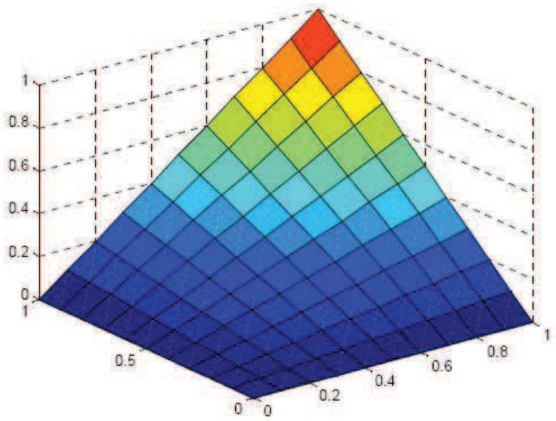

Figura 3.2: t-norma triangular do produto algébrico.

Proposição 6. *A função* $T_L : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$, $T_L(x,y) = \max(x+y-1,0)$ *é uma t-norma, denominada* ***norma triangular de Lukasiewicz.***

Prova. *Sejam* $T_L(x,y) = \max(x+y-1,0)$ *e* $x,y,z \in U$. *Tem-se que:*
(i) T_L é comutativa: $T_L(x,y) = \max(x+y-1,0) = \max(y+x-1,0) = T_L(y,x)$

(ii) T_L é associativa:

$$\begin{aligned} T_L(x, T_L(y,z)) &= T_L(x, \max(y+z-1,0)) \\ &= \max(x + \max(y+z-1,0) - 1, 0) \\ &= \max(\max(x,0) + \max(y-1,0) + \max(z,0) - 1, 0) \\ &= \max(\max(x+y-1,0) + z - 1, 0) \\ &= \max(T_L(x,y) + z - 1, 0) = T_L(T_L(x,y), z) \end{aligned}$$

(iii) T_L satisfaz a propriedade do elemento neutro: $T_L(x,1) = \max(x+1-1,0) = \max(x,0) = x$

(iv) T_L é monotônica: $y \leq z \rightarrow \quad \max(x+y-1,0) \leq \max(x+z-1,0) \rightarrow T_L(x,y) \leq T_L(x,z)$

Logo T_L é uma t-norma.

Proposição 7. *A função $T_D : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$ definida pela expressão*

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & Se\ (x, y)\epsilon\ [0, 1[^2 \\ \min\{x, y\}, & c.c; \end{cases} \tag{3.1}$$

é uma t-norma denominada norma **Drástica do Produto**.

Observação 1. *Pela Definição 9, temos que $T_D(1, y) = y$; $T_D(x, 1) = x$ e ;$T_D(x, y) = 0$, com $x, y \neq 1$. A demonstração é análoga as anteriores.*

3.1.2 Conorma Triangular

Definição 10. *Seja o intervalo unitário real $\mathbf{U} = [0, 1] \subseteq \mathbf{R}$. Uma conorma triangular, indicada por t-conorma, é uma operação binária $S : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

S_1 *Comutatividade:* $S(x, y) = S(y, x)$;

S_2 *Associatividade:* $S(x(S(y, z)) = S(S(x, y), z)$;

S_3 *Elemento Neutro:* $S(x, 0) = x$;

S_4 *Monotonicidade:* $S(x, y) \leq S(x, z)$ *se* $y \leq z$.

Uma t-conorma é utilizada geralmente para representar o operador de disjunção (ou) ou a união entre conjuntos fuzzy.

Proposição 8. *A função $S_M : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$, $S_M(x, y) = \max(x, y)$ é uma t-conorma, denominada **conorma triangular do máximo**.*

Prova. *Sejam $S_M(x, y) = \max(x, y)$ e $x, y, z \in U$. Tem-se que:*
(i) S_M é comutativa:$S_M(x, y) = \max(x, y) = \max(y, x) = S_M(y, x)$

(ii) S_M é associativa:

$$\begin{aligned} S_M(x, (S_M(y, z)) &= \max(x, (S_M(y, z)) \\ &= \max(x, (\max(y, z)) \\ &= \max(\max(x, y), z)) \\ &= \max(S_M(x, y), z) = S_M(S_M(x, y), z) \end{aligned}$$

(iii) S_M satisfaz a propriedade do elemento neutro: $S_M(x, 0) = \max(x, 0) = x$

(iv) S_M é monotônica: $y \leq z \rightarrow \max(x, y) \leq \max(x, z) \rightarrow S_M(x, y) \leq (S_M(x, z)$

Logo S_M é uma t-conorma.

A Figura 3.3 apresenta a representação da t-conorma triangular do máximo.

Proposição 9. *A função $S_P : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$, $S_P(x, y) = x + y - xy$ é uma t-conorma, denominada **conorma triangular produto** .*

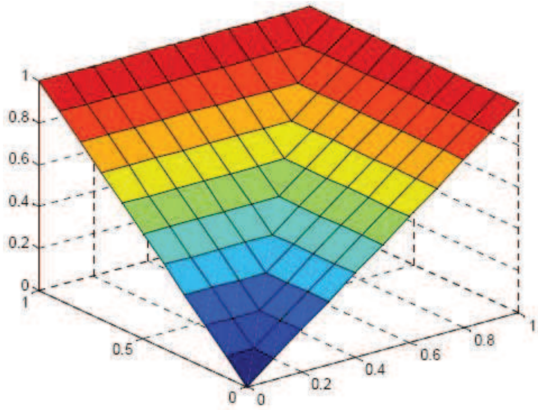

Figura 3.3: t-conorma triangular do máximo (união).

Prova. *Sejam* $S_P(x, y) = x + y - xy$ *e* $x, y, z \in U$. *Tem-se que:*
(i) T_P *é comutativa:* $S_P(x, y) = x + y - xy = y + x - yx = S_P(y, x)$

(ii) S_P *é associativa:*

$$\begin{aligned} S_P(x, S_P(y, z)) &= S_P(x, y + z - yz)) \\ &= (x + y + z - yz - x(y + z - yz)) \\ &= (x + y + z - yz - xy - xz + xyz) \\ &= (x + y - xy + z - yz - xz + xyz) \\ &= (x + (1 - x)y + z - (yz + xz - xyz)) \\ &= (S_P(x, y).z) = S_P(S_P(x, y).z) \end{aligned}$$

(iii) S_P *satisfaz a propriedade do elemento neutro:* $S_P(x, 0) = x + 0 - x.0 = x$

(iv) S_P *é monotônica:* $y \leq z \rightarrow \quad x + y - xy \leq x + z - xz \Rightarrow S_P(x, y) \leq (S_P(x, z)$

Logo S_P ***é uma t-conorma.***

A Figura 3.4 mostra a T-conorma triangular do produto.

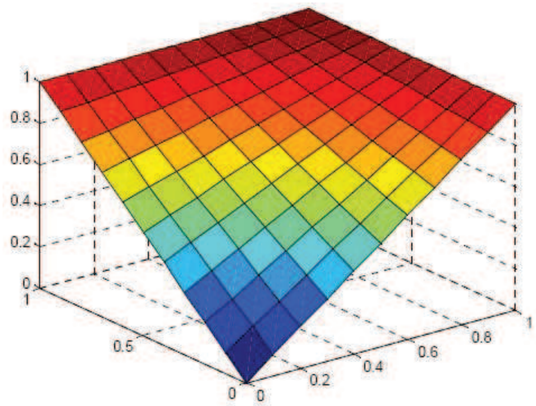

Figura 3.4: t-conorma triangular do produto (soma algébrica).

Proposição 10. *A função* $S_L : \mathbf{U}^2 \to \mathbf{U}$*,* $S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$ *é uma t-conorma, denominada* ***conorma triangular de Lukasiewicz****.*

Prova. *Sejam* $S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$ *e* $x, y, z \in U$*. Tem-se que:*
(i) S_L *é comutativa:*$S_L(x, y) = \min(x + y, 1) = \min(y + x, 1) = S_L(y, x)$

(ii) S_L *é associativa:*

$$\begin{aligned} S_L(x, S_L(y, z)) &= S_L(x, \min(y + z, 1)) \\ &= \min(x + \min(y + z, 1), 1) \\ &= \min(\min(x, 1) + \min(y, 1) + \min(z, 1), 1) \\ &= \min(\min(x + y, 1) + z, 1) \\ &= \min(S_L(x, y) + z, 1) = S_L(S_L(x, y), z) \end{aligned}$$

(iii) S_L *satisfaz a propriedade do elemento neutro:* $S_L(x, 0) = \min(x + 0, 1) = x + 0 = x$

(iv) S_L *é monotônica:* $y \leq z \to \min(x + y, 1) \leq \min(x + z, 1) \to S_L(x, y) \leq (S_L(x, z)$

Logo S_L ***é uma t-conorma.***

Proposição 11. *A função* $S_D : \mathbf{U}^2 \to \mathbf{U}$ *definida pela expressão*

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & Se\ (x, y) \in\ [0, 1[^2 \\ \max(x, y), & c.c; \end{cases} \tag{3.2}$$

é uma t-conorma, denominada norma ***Drástica da Soma***

Definição 11. *(KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000, Definições 1.23, 2.9 e 2.13) A t-norma T (t-conorma S, respectivamente) é dita*

(i) contínua (C), se for contínua em ambos os argumentos;

(ii) contínua à esquerda (CE), se for contínua à esquerda em ambos os argumentos ;

(iii) contínua à direita (CD), se for contínua à direita em ambos os argumentos ;

(iv) idempotente (I), se $T(x, x) = x$ $(S(x, x) = x$*, respectivamente) para todo* $x \in U$*;*

(v) Arquimediana (A), se para cada $x, y \in U$ *existe* $n \in \aleph$ *tal que* $x_T^{[n]} < y$*, isto é,* $T^n(x, x) < y$ $(x_S^{[n]} > y$*, isto é,* $S^n(x, x) > y$*, respectivamente);*

(vi) estrita (E), se T (S, respectivamente) é continua e estritamente monotônica, isto é, $T(x, y) < T(x, z))$ *sempre* $x > 0$ $(S(x, y) < S(x, z))$ *sempre* $x < 1$*, respectivamente) e* $y < z$*.*

(vii) nilpotente (N), se T (S, respectivamente) é contínua e se $x \in U$ *é um elemento nilpotente, isto é, se para cada* $x \in U$ *existe* $n \in \aleph$ *tal que* $x_T^{[n]} = T^n(x, x) = 0$ $(x_S^{[n]} = S^n(x, x) = 1$*, respectivamente).*

(viii) positiva (P), se $T(x, y) = 0$ $(S(x, y) = 1$*, respectivamente) implica que seja* $x = 0$ *ou* $y = 0$ $(x = 1$ *ou* $y = 1$*, respectivamente).*

Tabela 3.1: Exemplos básicos de t-normas e suas propriedades (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a; BACZYNSKI, 2004)

Designação	Representação	Propriedades
T_M:Mínimo	$T_M = min(x, y)$	C, I
T_P:Produto	$T_P = xy$	E
T_L: Lukasiewicz	$T_L = max(x + y - 1, 0)$	N
T_D: Drástica do produto	$T_D = (x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x, y \in [o, 1[; \\ \min(x, y), & \text{c.c.} \end{cases}$	A, nC
T_{nM}: Nilpotente mínimo	$T_{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x + y \leq 1; \\ \min(x, y), & \text{c.c.} \end{cases}$	nA, CE

Tabela 3.2: Exemplos básicos de t-conormas e suas propriedades (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a; BACZYNSKI, 2004)

Designação	Representação	Propriedades
S_M:Máximo	$S_M = max(x, y)$	C, I
S_P:Soma produto	$S_P = x + y - xy$	E
S_L: Lukasiewicz	$S_L = min(x + y, 1)$	N
S_D: Drástica da soma	$S_D = (x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x, y \in [o, 1[; \\ \min(x, y), & \text{c.c.} \end{cases}$	A, nC
S_{nM}: Nilpotente máximo	$S_{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x + y \leq 1; \\ \min(x, y), & \text{c.c.} \end{cases}$	nA, CE

Observação 2. *T_M e T_P são positivas enquanto as t-normas T_L, T_D e T_{nM} não são. Da mesma forma, S_M e S_P são positivas enquanto as t-conormas S_L, S_D e S_{nM} não são.*

Nas Tabelas 3.1 e 3.2 apresenta-se uma listagem de t-normas e t-conormas básicas e as respectivas propriedades satisfeitas por estas normas triangulares.

Proposição 12. *Sejam uma t-norma T e uma t-conorma S. Então as seguintes equações são satisfeitas:*

$$T(0, x) = 0 \tag{3.3}$$

e

$$S(1, x) = 1 \tag{3.4}$$

Prova.

$$0 = T(0, 1) \geq T(0, x) \geq T(0, 0) \rightarrow T(0, x) = 0 = T(x, 0)$$

e

$$1 = S(1, 0) \leq S(1, x) \leq S(1, 1) \rightarrow S(1, x) = 1 = S(x, 1)$$

3.2 Negação Fuzzy

Esta seção considera o estudo das funções de complemento ou das negações fuzzy. São definidas e exemplificadas negações fuzzy forte, estritas e contínuas. O ponto de equilíbrio de uma negação é apresentado, assim como também é considerada a ação de automorfismo em funções de negação, definidas em $\mathbf{U}$.

Definição 12. ***Negação Fuzzy e Negação Fuzzy Forte****: (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000) A função* $N : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ *é uma* negação fuzzy *se*

N1 *:* $N(0) = 1$ *e* $N(1) = 0$*;*

N2 *: Se* $x \geq y$ *então* $N(x) \leq N(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{U}$.

(BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003) Uma negação fuzzy se satisfaz a propriedade involutiva ***N3*** *é chamada de negação fuzzy forte .*

N3 *:* $N(N(x)) = x$, $\forall x \in \mathbf{U}$.

Além disso, uma negação fuzzy é contínua e estrita quando:

N4 *: Se* $x > y$ *então* $N(x) < N(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{U}$.

Verifica-se facilmente que toda negação fuzzy forte é estrita. Um elemento $e \in \mathbf{U}$ é dito ser *ponto de equilíbrio* se N é a negação fuzzy N e $N(e) = e$. Se N é uma negação fuzzy estrita, então existe um único ponto de equilíbrio $e_N \in \mathbf{U}$ e admite $N(x) \geq e_N$, para todo $x \leq e_N$. Por outro lado, tem-se $N(x) \leq e_N$, para todo $x \geq e_N$.

Prova. *Seja* e_N *um ponto de equilíbrio para a negação fuzzy N tal que* $x \geq e_N$*. Então* $N(x) \geq N(e_N) = e_N$*. Suponha* $e_N{}'$ *seja outro ponto de equilíbrio para a negação fuzzy N tal que* $e_N{}' \leq e_N$*. Logo,* $N(e_N) \geq N(e_N)'$*, o que significa* $e_N \leq e'_N$*. Portanto* $e_N{}' = e_N$*. De forma análoga se prova a construção para* $e_N{}' \geq e_N$*.*

3.2.1 Exemplos de Negação Fuzzy

Apresentam-se a seguir as principais definições de negação fuzzy e alguns de seus relacionamentos já estabelecidos na literatura.

Exemplo 1. *Um típico exemplo de uma negação fuzzy forte é* ***Negação Complementar ou Negação Padrão****, ou seja, é a função dada por*

$$N_C(x) = 1 - x. \tag{3.5}$$

Exemplo 2. *As* ***Negações de Gödel****, as quais são negações fuzzy, mas não são estritas e nem fortes. Em (FODOR; ROUBENS, 1994), estão definidas as funções denominadas*

$$N_{D1}(x) = \begin{cases} 0, & se\ x > 0 \\ 1, & se\ x = 0; \end{cases} \tag{3.6}$$

$$N_{D2}(x) = \begin{cases} 1, & se\ x < 1 \\ 0, & se\ x = 1; \end{cases} \tag{3.7}$$

Exemplo 3. *Sendo T e S, respectivamente a t-norma e a t-conorma. A função* $N_T, N_S : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ *é definida como*

$$N_T(x) = sup\{t \in \mathbf{U} | T(x,t) = 0\}, \tag{3.8}$$

$$N_S(x) = inf\{t \in \mathbf{U}|S(x,t) = 1\}, \tag{3.9}$$

são chamadas ***negação natural de T****(Eq.3.8) e a* ***negação natural de S*** *(Eq.3.9), respectivamente.*

As seguintes condições são suficientes quando tem-se negação natural de t-normas e t-conormas:

Proposição 13. *(BEDREGAL, 2009) As seguintes proposições são satisfeitas:*

(i) N_C é uma negação natural se T_L e é uma negação natural se S_L;

(ii) N_C é uma negação natural se a positiva t-norma T (t-conorma S_L);

(iii) N_{D_2} é uma negação natural se T_{D1} e N_{D_1} é uma negação natural se S_D;

(iv) N_C é uma negação natural se T_{nM} e é uma negação natural se S_{nM}.

Observação 3. *Para qualquer t-norma T e t-conorma S, temos $T(x,0) = 0$ e $S(x,1) = 1$. logo, tem-se que os conjuntos definidos pelas Eq. (3.8) e Eq. (3.9) são não-vazios.*

Observe também que, se $S(x,y) = 1$ para algum $x,y \in \mathbf{U}$, então $y \geq N_S(x)$ e se $T(x,y) = 0$ para algum $x,y \in \mathbf{U}$, então $y \leq N_S(x)$. Além disso, se $z < N_T(x)$ então $T(x,z) = 0$ e se qualquer $z > N_S(x)$ então $T(x,z) = 0$, quando $z, x \in \mathbf{U}$.

Considerando duas negações fuzzy N_1 e N_2, pode-se estabelecer a ordem parcial definida como:

$$N_1 \leq N_2 \text{ se, para cada } x \in \mathbf{U}, N_1(x) \leq N_2(x).$$

Observação 4. *Se $N_1 \leq N_2$ e $x \geq y$ então $N_1(x) \leq N_2(y)$.*

3.3 Relação de Dualidade entre t-normas e t-conormas

Definição 13. *(BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003) Seja N uma negação fuzzy. A função $S : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ é uma t-conorma se, e somente se, existe a t-norma T tal que, para todo $(x,y) \in [0,1]^2$, cada uma das seguintes equivalências são satisfeitas:*

$$S(x,y) = N(T(N(x), N(y)), \tag{3.10}$$

$$T(x,y) = N(S(N(x), N(y)). \tag{3.11}$$

Se N é forte, a t-conorma dada por Eq.(3.10) é chamada de t-conorma dual de T e, analogamente, a t-norma dada por Eq.(3.11) diz-se a t-norma dual de S.

Proposição 14. *Seja a negação padrão, $N_C(x) = 1 - x$. (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) e (T_D, S_D) são pares de funções duais em relação a N_C.*

Prova. *(i) (T_M, S_M) é par dual:*

$$\begin{aligned} 1 - T_M(1-x, 1-y) &= 1 - \min(1-x, 1-y) \\ &= \max(1-(1-x), 1-(1-y)) \\ &= \max(x,y) = S_M(x,y) \end{aligned}$$

(ii) (T_P, S_P) *é par dual:*

$$\begin{aligned} 1 - T_P(1-x, 1-y) &= 1 - (1-x).(1-y) \\ &= 1 - (1 - x - y + xy) \\ &= 1 - 1 + x + y - xy = S_P(x,y) \end{aligned}$$

(iii) (T_L, S_L) *é par dual:*

$$\begin{aligned} 1 - S_L(1-x, 1-y) &= 1 - \min((1-x) + (1-y) - (1-1), (1-0)) \\ &= \max(1 - (1-x) + 1 - (1-y) - 1 - (1-1), 1 - (1-0)) \\ &= \max(x + y - 1, 0) = T_L(x,y) \end{aligned}$$

(iv) (T_D, S_D) *é par dual:*

$$\begin{aligned} a)T_D(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in [0,1[^2 \\ &= 1 - 0 = 1 = S_D(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)T_D(x,y) &= \min(1-x, 1-y) \\ &= \max(1-(1-x), 1-(1-y)) \\ &= \max(1 - 1 + x, 1 - 1 + y) \\ &= \max(x,y) = S_D(x,y) \end{aligned}$$

3.4 Automorfismos

Para o desenvolvimento deste trabalho é de fundamental importância o estudo de automorfismos. Automorfismos são funções bijetoras em U que preservam a ordenação natural. Os automorfismos atuam nas funções gerando novas funções e preservando suas propriedades. (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; KLEMENT; NAVARA, 1999; NAVARA, 1999). O conjunto de todos os automorfismos é um grupo sob a composição de função e uma estrutura fundamental para a representação dos teoremas relacionados com os conectivos fuzzy.

Definição 14. *(BEDREGAL et al., 2007)* ***Automorfismo****: A função* $\phi : U \to U$ *é um automorfismo se, e somente se, é bijetora e monotônica:* $x \leq y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$ *. Ou seja,* ϕ *é uma função contínua e estritamente crescente, tal que:* $\phi(0) = 0$ *e* $\phi(1) = 1$.

Um automorfismo ϕ atua em uma função fuzzy $f : \mathbf{U}^n \to \mathbf{U}$, da seguinte forma:

$$f^{\phi}(x_1, \ldots, x_n) = \phi^{-1}(f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))). \tag{3.12}$$

Seja $Aut(\mathbf{U})$ o conjunto de todos os automorfismos definidos no intervalo unitário $\mathbf{U}$, e seja $\circ$ a operação de composição de função em $\mathbf{U}$. $(Aut(\mathbf{U}), \circ)$ é um grupo. Logo, automorfismos são fechados para a composição em $\mathbf{U}$: $\phi_1 \circ \phi_2 \in Aut(\mathbf{U}), \forall \phi_1, \phi_2 \in Aut(\mathbf{U})$.

E ainda, o inverso de um automorfismo ϕ, representado por ϕ^{-1} é também um automorfismo $\mathbf{U}$: $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = id(\mathbf{U})$

Definição 15. ***Funções Conjugadas****: (BUSTINCE et al., 2009) As funções* $f_1, f_2 : U^2 \to$

U são denominadas funções conjugadas se existe um automorfismo $\phi : U \to U$ tal que $f_2 = f_1^{\phi}$,para todo $x_1, x_2 \in U$, $f_2(x_1, x_2) = \phi^{-1}(f_1(\phi(x_1), \phi(x_2)))$.

Observa-se que $f_2 = f_1^{\phi}$ e $f_1 = f_2^{\phi^{-1}}$.

Exemplo 4. *A função $\phi : U \to U$ definida por $\phi(x) = x^n$ sempre que n é um número natural, é um automorfismo. O automorfismo inverso corresponde a função $\phi^{-1} : U \to U$, definida por $\phi^{-1}(x) = \sqrt{x}$.*

3.4.1 Automorfismo e Norma triangular

Pela proposição a seguir, observa-se que os automorfismos preservam as t-conormas.

Proposição 15. *Seja T uma t-norma e ϕ um automorfismo, então tem-se:*

$$T^{\phi}(x, y) = \phi^{-1}(T(\phi(x), \phi(y))) \tag{3.13}$$

é também uma t-norma.

Prova. $\forall x, y \in [0, 1]$ *é uma t-norma.*

$$\begin{array}{lrcl} (T_1) & T^{\phi}(x, y) & = & \phi^{-1}(T(\phi(x), \phi(y))) \\ & & = & \phi^{-1}T(\phi(y), \phi(x)) \\ & & = & T^{\phi}(y, x), \quad \textit{logo é } T^{\phi} \textit{ comutativa.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (T_2) & T^{\phi}(x, T^{\phi}(y, z)) & = & T^{\phi}(x, \phi^{-1}(T(\phi(y), \phi(z)) \\ & & = & \phi^{-1}(T(\phi(x), \phi.\phi^{-1}(T(\phi(y), \phi(z)) \\ & & = & \phi^{-1}(T(\phi(x), (T(\phi(y), \phi(z)) \\ & & = & \phi^{-1}T(T(\phi(x), \phi(y), \phi(z)) \\ & & = & \phi^{-1}T(\phi.\phi^{-1}(T(\phi(x), \phi(y)), \phi(z)) \\ & & = & T^{\phi}(\phi^{-1}(T(\phi(x), \phi(y)), z) \\ & & = & T^{\phi}(T^{\phi}(x, y), z), \quad \textit{logo é } T^{\phi} \textit{ associativa.} \end{array}$$

(T_3) Se $x_1 \leq x_2$, então $\phi(x_1) \leq \phi(x_2)$ e tem-se que

$$\begin{array}{rcl} T^{\phi}(x_1, y) & = & \phi^{-1}T(\phi(x_1), \phi(y)) \\ & \leq & \phi^{-1}T(\phi(x_2), \phi(y)) \\ & = & T^{\phi}(x_2, y, \quad \textit{logo } T^{\phi} \textit{ é monotônica no 1}^{o} \textit{ argumento.} \end{array}$$

e de forma análoga: sempre que $y_1 \leq y_2$, tem-se $\phi(y_1) \leq \phi(y_2)$

$$\begin{array}{rcl} T^{\phi}(x, y_1) & = & \phi^{-1}T(\phi(x), \phi(y_1)) \\ & \leq & \phi^{-1}T(\phi(x), \phi(y_2)) \\ & = & T^{\phi}(x, y_2) \quad \textit{logo, } T^{\phi} \textit{ é monotônica no 2}^{o} \textit{ argumento.} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(T_4) \qquad T^{\phi}(x,1) &= \phi^{-1}T(\phi(x),\phi(1)) \\
&= \phi^{-1}(T(\phi(x),1)) \\
&= T^{\phi}(\phi(x)) \\
&= x, \quad \textit{logo 1 é o elemento neutro para } T^{\phi}.
\end{aligned}$$

Proposição 16. *(ACZEL, 1996; SCHWEIZER; SKLAR, 1983) A t-norma contínua é estrita se, e somente se, existe um automorfismo ϕ de tal forma que $T(x,y) = \phi^{-1}(\phi(x)\cdot\phi(y))$.*

3.4.2 Automorfismo e Conorma triangular

A próxima proposição mostra que os automorfismos preservam as t-conormas.

Proposição 17. *Seja S uma t-conorma ϕ um automorfismo, então tem-se:*

$$S^{\phi}(x,y) = \phi^{-1}(S(\phi(x),\phi(y))) \tag{3.14}$$

é também uma t-conorma.

Prova. $\forall x, y \in [0,1]$ *é uma t-conorma.*

$$\begin{aligned}
(S_1) \qquad S^{\phi}(x,y) &= \phi^{-1}(S(\phi(x),\phi(y))) \\
&= \phi^{-1}(S(\phi(y),\phi(x))) \\
&= S^{\phi}(y,x), \quad \textit{logo } S^{\phi} \textit{ é comutativa.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S_2) \qquad S^{\phi}(x,S^{\phi}(y,z)) &= S^{\phi}(x,\phi^{-1}(S(\phi(y),\phi(z)) \\
&= \phi^{-1}(S(\phi(x),\phi.\phi^{-1}(S(\phi(y),\phi(z)) \\
&= \phi^{-1}(S(\phi(x),(S(\phi(y),\phi(z)) \\
&= \phi^{-1}S(S(\phi(x),\phi(y),\phi(z)) \\
&= \phi^{-1}S(\phi.\phi^{-1}(S(\phi(x),\phi(y)),\phi(z)) \\
&= S^{\phi}(\phi^{-1}(S(\phi(x),\phi(y)),z) \\
&= S^{\phi}(S^{\phi}(x,y),z), \quad \textit{logo } S^{\phi} \textit{ é associativa.}
\end{aligned}$$

(S_3) *Se* $x_1 \leq x_2$. *Então* $\phi(x_1) \leq \phi(x_2)$.

$$\begin{aligned}
S^{\phi}(x_1,y) &= \phi^{-1}S(\phi(x_1),\phi(y)) \\
&\leq \phi^{-1}S(\phi(x_2),\phi(y)) \\
&= S^{\phi}(x_2,y), \quad \textit{logo } S^{\phi} \textit{ é monotônica no 1}^{o} \textit{ argumento.}
\end{aligned}$$

e de forma análoga: $S^{\phi}(x,y_1) \leq S^{\phi}(x,y_2)$ *sempre que* $y_1 \leq y_2$

$$\begin{aligned}
S^{\phi}(x,y_1) &= \phi^{-1}S(\phi(x),\phi(y_1)) \\
&\leq \phi^{-1}S(\phi(x),\phi(y_2)) \\
&= S^{\phi}(x,y_2), \quad \textit{logo } S^{\phi} \textit{ é monotônica no 2}^{o} \textit{ argumento.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(S_4) \qquad S^{\phi}(x,0) &= \phi^{-1}S(\phi(x),\phi(0))\\
&= \phi^{-1}(S(\phi(x),0))\\
&= S^{\phi}(\phi(x))\\
&= x \quad \textit{logo 0 é o elemento neutro para } S^{\phi}.
\end{aligned}
$$

Proposição 18. *(ACZEL, 1996; SCHWEIZER; SKLAR, 1983) A t-conorma contínua é estrita se, e somente se, existe um automorfismo ϕ de tal forma que $S(x,y) = \phi^{-1}(\phi(x)\cdot\phi(y))$.*

3.4.3 Automorfismos e Negações Fuzzy

Nesta seção são estudados os principais resultados já conhecidos na literatura sobre a ação de automorfismos em negação fuzzy, para fundamentação desta proposta de trabalho.

Proposição 19. *(BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003)[Teorema 2] Sejam T uma t-norma continua e N uma negação fuzzy. Para todo $x \in U$, $T(x,N(x)) = 0$ se, e somente se, existir um automorfismo ϕ: $U \to U$ tal que*
$T(x,y) = \phi^{-1}(max(\phi(x)+\phi(y)-1,0))$, e $N(x) \leq \phi^{-1}(1-\phi(x))$.

Proposição 20. *(BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003, Teorema 0) N é uma negação fuzzy forte se, e somente se houver um automorfismo $\phi : U \to U$ de tal forma que*

$$N(x) = N_S^{\phi}(x) = \phi^{-1}(1-\phi(x)) \tag{3.15}$$

Proposição 21. *Seja N uma negação forte, então $\forall x \in [0,1]$ a Eq.3.16 também é uma negação forte:*

$$N^{\phi}(x) = \phi^{-1}(N(\phi(x)) \tag{3.16}$$

Prova. *Para ser uma negação forte, as propriedades N1,N2 e N3 devem ser satisfeitas, então:*
(N1) $N^{\phi}(0) = \phi^{-1}(N(\phi(0)) = \phi^{-1}(N(0)) = \phi^{-1}(1) = 1$
e $N^{\phi}(1) = \phi^{-1}(N(\phi(1)) = \phi^{-1}(N(1)) = \phi^{-1}(0) = 0$

(N2) *Seja* $x \leq y$. *Então* $\phi(x) < \phi(y)$.
Logo $N^{\phi}(x) = \phi^{-1}(N(\phi(x)) \geq \phi^{-1}(N(\phi(y)) = N^{\phi}(y)$

(N3) $N^{\phi}(N^{\phi}(x)) = N^{\phi}(\phi^{-1}(N(\phi(x)) = \phi^{-1}(N(\phi.\phi^{-1}(N(\phi(x))) = \phi^{-1}(N(N(\phi(x))) = \phi.\phi^{-1} = x$

A seguir, mostra-se que a classe de negações fuzzy(estritas, fortes) é fechada sob a ação de um automorfismo (BEDREGAL, 2010). Negações fuzzy fortes são transformações monótonas da negação padrão.

Definição 16. *(BAETS, 1997, Definition 12) Sejam N uma negação fuzzy forte em U e as funções $f, f_N : U^n \to U$. A função f_N denota a N-**dual de** f sendo definida pela expressão:*

$$f_N(x_1,x_2,\dots x_n) = N(f(N(x_1),N(x_2),\dots,N(x_n))). \tag{3.17}$$

Observe que, como N é involutiva, $f_{N_N} = f$, ou seja , f é a N-dual de f_N. Além disso, tem-se que f, f_N são chamadas funções mutuamente duais.

3.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram estudadas as funções de agregação da lógica fuzzy (normas e conormas triangulares) e a negação fuzzy. Verificou-se a relação de dualidade entre t-normas e t-conormas, apresentando-se exemplos básicos de t-normas, t-conormas e de negações. A relação de dualidade entre funções e a ação de automorfismos na construção de funções conjugadas também foram descritas, por serem revelantes para análise de propriedades algébricas relacionadas com o estudo das implicações fuzzy estudas no próximo capítulo.

4 IMPLICAÇÕES FUZZY

Neste capítulo considera-se o estudo das implicações fuzzy, suas propriedades e mais precisamente, caracterizações de algumas classes de implicações fuzzy. Esta discussão concentra-se, principalmente, na análise de propriedades algébricas de quatro importantes classes de implicações fuzzy: S-implicações, R-implicações, QL-implicações e D-implicações.

4.1 Definição e Propriedades de Implicações Fuzzy

Definição 17. *Uma função* $I : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ *é uma implicação fuzzy se verifica as seguintes condições de contorno:*

I1 $I(1,1) = I(0,1) = I(0,0) = 1$ e $I(1,0) = 0$

Portanto, uma implicação fuzzy é uma extensão da implicação clássica.

4.1.1 Propriedades das Implicações Fuzzy

Existem inúmeras propriedades das implicações fuzzy apresentadas em (RUIZ-AGUILERA; TORRENS, 2009; FODOR; ROUBENS, 1994; BACZYNSKI, 2004; BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a; BACZYNSK; JAYARAM, 2009; BALASUBRAMANIAM, 2006; BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009a; BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003; BACZYNSKI; JAYARAN, 2007; FODOR, 1995; MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2007; MAS et al., 2007; SAINIO; TURUNEN; MESIAR, 2008; RUAM; KERRE, 1993; YAGER, 2004a, 1983). As propriedades das implicações fuzzy relevantes para este estudo, estão enunciadas abaixo. Considere para tal que $x, y, z \in [0,1]$:

I2 Se $x \leq z$ então $I(x,y) \geq I(z,y)$(antitonicidade no primeiro argumento);

I3 Se $y \leq z$ então $I(x,y) \leq I(x,z), \forall x,y,z \in [0,1]$(isotonicidade no segundo argumento);

I4 $I(1,x) = x$ (princípio da neutralidade);

I5 $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$ (princípio da troca);

I6 $I(x,y) = I(x, I(x,y))$;

I7 $I(x, N(x)) = N(x)$;

I8 $N_I(x) = I(x,0) = x$;

I9 $I(x, 1) = 1$ (dominância da verdade do consequente);

I10 $I(x, y) \geq y$;

I11 $I(x, y) = I(N(y), N(x))$ (simetria contrapositiva);

I12 $I(0, y) = 1$ (dominância da falsidade do antecedente);

I13 $I(x, y) \geq N_I(x)$;

I14 $I(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = 1$ e $y = 0$;

I15 $S(x, N(x)) = 1$ (lei do terceiro excluído);

I16 $I(x, y) = 0$ se $x > y$ (princípio da ordenação);

I17 $I(x, x) = 1$ (princípio da identidade);

I18 $I(x, y) = 1$ então $x \leq y$ (condição de contorno).

A próxima definição mostra que é possível definir uma negação fuzzy a partir de uma implicação fuzzy.

Proposição 22. *(BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a) Se $I : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$ é uma implicação fuzzy satisfazendo a propriedade* ***I1****: então $N_I : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$, definida por $N_I(x) = I(x, 0)$, é uma negação fuzzy.*

4.2 Principais Classes de Implicações Fuzzy

Esta seção apresenta as principais classes de implicações referenciadas e estudadas na literatura da área.

4.2.1 S-Implicações

Segundo (RUIZ-AGUILERA; TORRENS, 2009),(BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a) uma S-Implicação é uma generalização para o intervalo unitário, da condicional da lógica proposicional clássica dada pela expressão:

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q, \tag{4.1}$$

onde os conectivos $\vee$ (ou) e $\neg$ (não) representam as operações de conjunção e negação lógica Booleana, respectivamente.

Definição 18. *Seja S uma t-conorma e N uma negação forte, então uma S-implicação é uma implicação definida pela expressão:*

$$I_{S,N}(x, y) = S(N(x), y), \quad \forall\, x, y \in [0, 1]. \tag{4.2}$$

4.2.1.1 Propriedades de S-implicações

Proposição 23. *(BACZYNSKI; JAYARAN, 2007, Teorema 1.7) A função $I : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$ é uma S- implicação fuzzy forte se, e somente se, I satifaz as propriedades **I2, I3, I4, I5 e I11**:*

Na sequência, a Proposição 24 apresenta a condição para que uma S-implicação gere uma negação fuzzy forte, de acordo com a Proposição 22

Proposição 24. *(BACZYNSKI; JAYARAN, 2007, Teorema 1.8) Seja $I : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$ uma S-implicação. $N_{I_{S,N}}$ é fuzzy forte se, e somente se ,$I_{S,N}$ satifaz a propriedade **I8**.*

Prova. *($\Rightarrow$) pela Proposição 23, $I_{S,N}$ satisfaz as propriedades **I2-I5**. Supondo que $I_{S,N}$ satisfaz a propriedade **I8**.Logo, por Eq. 4.3 e Eq. 4.4:*

$$I_{S,N}(x,0) \quad = \quad S(N(x),0) = N(x) \tag{4.3}$$

e,

$$N(N(x)) \quad = \quad N(I(x,0)) = N(S(N(x),0)). \tag{4.4}$$

Tem-se então que:

$$\begin{aligned} N_{I_{S,N}}(N_{I_{S,N}}(x)) &= I_{S,N}(I_{S,N}(x,0),0) \\ &= S(N(I_{SN}(x,0)),0) \\ &= S(N(S(N(x)),0),0) \\ &= S((N(N(x),0) \\ &= S(x,0) = 0 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)A prova inversa é análoga.

Proposição 25. *A função $I : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$ é uma S- implicação fuzzy então I_S satifaz as propriedades **I9-I14** :*

Prova. *Sejam $x, y, z \in [0,1]$ e N uma negação fuzzy forte:*
(I9) $I_{SN}(x,1) = S(N(x),1) = 1$
(I10) $I_{SN}(x,y) = S(N(x,y)) \geq S(N(1),y)) \geq S(0,y)) \geq y$
(I11) *Anteriormente demonstrada na Proposição 23*
(I12) $I_{SN}(0,x) = S(N(0),x) = S(1,x) = 1$
(I13) $I_{SN}(x,y) \geq S(N(x),y) \geq S(N(x),0) \geq I_{SN}(x,0) = N_I(x)$
(I14) $I(x,y) = 0$ *se, e somente se,* $x = 1$ *e* $y = 0$

Se $x = 1$ *e* $y = 0$ *então* $I_{SN}(1,0) = S(N(1),0) = S(0,0) = 0$ *Se* $I_{SN}(x,y) = 0$ *então* $S(N(x),y) = 0$*, logo* $S(N(x),y) = S(0,0)$*. Portanto* $y = 0$ *e* $N(x) = 0 \rightarrow x = 1$

4.2.2 QL-Implicações

Se S uma t-conorma, T uma t-norma e N uma negação forte, então $\forall\ x, y \in [0,1]$, uma QL-implicação é uma implicação definida por:

$$I_{S,N,T}(x,y) = S(N(x),T(x,y)) \tag{4.5}$$

As QL-implicações estendem a noção de implicação da lógica proposicional, dada pela expressão:

$$\neg p \vee (p \wedge q)$$

onde, os conectivos $\vee$ (ou) disjunção e $\wedge$ (e) conjunção são representadas, respectivamente, pelas operações de máximo (união) e de mínimo (intersecção), e $\neg$ (não) negação pela negação padrão fuzzy.

4.2.2.1 Propriedades de QL-implicações

Proposição 26. *Seja $I : \mathbf{U}^2 \rightarrow \mathbf{U}$ uma implicação fuzzy forte. I é uma QL-implicação então as propriedades **I2, I3, I4,I7** e **I12** são satisfeitas:*

Prova. *Considerando $I_{S,N,T} = S(N(x), y))$, sempre que $x, y, z \in \mathbf{U}$, segue-se que:*
*(**I2**) Se $x \leq z$, então*

$$\begin{aligned} I_{S,N,T}(x, y) &= S(N(x), T(x, y)) \\ &\geq S(N(z), T(x, y)) \;\; (troca \;\; do \;\; 1^o \;\; argumento) \\ &\geq S(N(z), T(z, y)) = I_{S,N,T}(z, y). \end{aligned}$$

*(**I3**) Se $y \leq z$, então*

$$\begin{aligned} I_{S,N,T}(x, y) &= S(N(x), T(x, y)) \\ &\leq S(N(x), T(x, z)) \\ &= I_{S,N,T}(x, z). \end{aligned}$$

*(**I4**)*

$$\begin{aligned} I_{S,N,T}(1, x) &= S(N(1), T(1, x)) \\ &= S(0, T(1, x)) \quad (por\ T_3) \\ &= S(0, x) \quad (por\ S_3) \\ &= x. \end{aligned}$$

*(**I7**) Seja N uma negação forte, tem-se que:*

$$\begin{aligned} I_{S,N,T}(x, N(x)) &= S(N(x), T(x, N(x))) \quad (por\ Eq.4.5\ ) \\ &= S(N(x), 0) \quad (por\ S_3) \\ &= N(x). \end{aligned}$$

*(**I12**) Seja N uma negação forte, tem-se que:*

$$\begin{aligned} I_{S,N,T}(0, y) &= S(1, T(0, y)) \\ &= S(1, 0) = 1 \end{aligned}$$

Proposição 27. *Se uma QL-implicação satisfaz a simetria contrapositiva, com respeito a propriedade (**I11**), então $S(x, N(x)) = 1 \;\;,\;\; \forall x \in \mathbf{U}$.*

Prova. *Seja* $I_{S,N,T}(x,y) = S(N(x), T(x,y))$ *satisfazendo a simetria contrapositiva.*

$$
\begin{aligned}
S(x, N(x)) &= S(N(x), x) \quad \textit{(comutatividade da S)}\\
&= S(N(x), T(x,1)) \quad \textit{(elemento neutro na T e definição de QL-implicação)}\\
&= I(x,1) = I(N(1), N(x))\\
&= I(0, N(x)) \quad \textit{(definição de QL-implicação)}\\
&= S(N(0), T(0, N(x))\\
&= S(1, T(0, N(x)) \quad \textit{(elemento absorvente da T)}\\
&= S(1,0) \quad \textit{(elemento neutro da S)}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Proposição 28. *Se* $I_{S,N,T}$ *satisfaz* ***I2****, então :* $S(x, N(x)) = 1$

Prova. *Seja* $I_{S,N,T}$ *satisfazendo* ***I2****, ou seja,* $x \leq z \to I(x,y) \geq I(z,y)$, $\forall x, y \in \mathbf{U}$

$$
\begin{aligned}
I_{S,N,T}(x,y) &= S(N(x), T(x,y))\\
&= S(N(x), T(x,1)) \quad \textit{(elemento neutro da T)}\\
&= I(x,1) \quad \textit{(definição de QL-implicação)}\\
&\geq I_{S,N,T}(1,1) \quad \textit{(definição do domínio } U = [0,1]\textit{)}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Logo, verifica a lei do terceiro excluído.

Proposição 29. *Se* $I_{S,N,T}$ *satisfaz* ***I9****, então :* $S(x, N(x)) = 1, \forall x \in \mathbf{U}$

Prova. *Seja I uma QL-implicação, tal que* $I(x,1) = 1$*. Então,*$S(x, N(x)) = S(N(x), x) = S(N(x), T(x,1)) = I_{S,N,T}(x,1) = 1$

Proposição 30. *Seja* T_M *uma t-norma mínima, uma negação fuzzy forte e S uma t-conorma satisfazendo* $S(x, N(x)) = 1$*. Então a correspondente QL-implicação* I_{S,N,T_M} *é dada por:*

$$
I_{S,N,T_M} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ S(N(x), y), & \text{c.c;} \end{cases} \tag{4.6}
$$

Prova. *Considere primeiramente que* $x \leq y$*. Tem-se:*

$$
\begin{aligned}
I_{S,N,T_M}(x,y) = S(N(x), T(x,y))&\\
&= S(N(x), T_M(x,y)) = S(N(x), \min(x,y))\\
&= S(N(x), x) \quad \textit{comutatividade da S}\\
&= S(x, N(x)) = 1
\end{aligned}
$$

Agora, seja $x, y \in \mathbf{U}$ *tais que* $x > y$*. logo, tem-se que:*

$$
\begin{aligned}
I_{S,N,T_M}(x,y) &= S(N(x), T_M(x,y))\\
&= S(N(x), \min(x,y)) = S(N(x), y)
\end{aligned}
$$

Proposição 31. *Seja I_{S_MNT} uma QL-implicação. Então, as seguintes proposições são válidas:*

(***i***) $I_{S_MNT}(x, N(x)) = N(x)$ e

(***ii***) $I_{S_MNT}(x, y) = 1$ se, e somente se $x = 0$ e $x = y = 1$

Prova. *(**i**)Seja I uma QL-implicação sendo S a t-conorma do máximo.*

$$\begin{aligned} S_M(N(x), T(x, N(x)) &= I_{S_MNT}(x, N(x))) \\ &= S_M(N(x), 0) \quad \textit{(definição da } T \ (p \wedge \neg p = 0)) \\ &= S(N(x), T(x, 1)) \\ &= \max(N(x), 0), \quad (x \in [0, 1]) \\ &= N(x) \end{aligned}$$

*(**ii**) (⇒) $I_{S_MNT}(x, y) = 1$ se, e somente se, $x = 0$ e $x = y = 1$*

a) Se $x = 0$

$$\begin{aligned} I_{S_MNT}(0, y) &= S_M(N(0), T(0, y)) \quad \textit{(0 é o elemento absorvente da T)} \\ &= S_M(1, 0) = \max(1, 0) = 1 \end{aligned}$$

b) Se $x = y = 1$

$$\begin{aligned} I_{S_MNT}(1, 1) &= S_M(N(1), T(1, 1)) = S_M(0, 1) \\ &= \max(0, 1) = 1 \end{aligned}$$

(⇐)a volta é análoga.

Proposição 32. *(BACZYNSKI; JAYARAM, 2008b, Teorema 2.6.19) Seja $I : \mathbf{U}^2 \to \mathbf{U}$ uma QL-implicação. I satisfaz* **I5** *se e somente se I é uma S-implicação.*

4.2.3 D-Implicações

Seja S uma t-conorma, T uma t-norma e N uma negação forte, então $\forall\ x, y \in [0, 1]$ uma D-implicação fuzzy é uma implicação fuzzy, dada por:

$$I_{S,T,N}(x, y) = S(T(N(x), N(y)), y) \tag{4.7}$$

Uma D-Implicação é uma generalização para o intervalo unitário, da condicional da lógica proposicional clássica, dada pela expressão:

$$p \to q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee q$$

4.2.3.1 Propriedades de D-implicações

Proposição 33. *Uma D-implicação corresponde a contraposição de uma QL-implicação com relação a negação forte N.*

(***i***) $I_{S,T,N}(x, y) = N(I_{S,N,T}(N(y), N(x))$
(***ii***) $I_{S,N,T}(x, y) = N(I_{S,T,N}(N(y), N(x))$

Prova. *Seja $I_{S,N,T}(x,y)$ uma QL-implicação e*

$I_{S,T,N}$ uma D-implicação.

$$\begin{aligned} a)I_{S,T,N}(N(y),N(x)) &= S(T(y,x),N(x)) \quad \textit{(comutatividade da S e T)} \\ &= S(N(x)T(x,y)) = I_{S,N,T}(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)I_{S,N,T}(N(y),N(x)) &= S(N(N(y)),T(N(y),N(x))) \\ &= S(y,T(N(y),N(x)) \quad \textit{(comutatividade da S e T)} \\ &= S(T(N(x),(N(y)),y) = I_{S,T,N}(x,y) \end{aligned}$$

Portanto, verifica-se que a cada QL-implicação é possível determinar a sua contra-positiva, que será uma D-implicação..

Proposição 34. *Seja T uma t-norma , S uma t-conorma e N uma negação fuzzy forte.Se I é uma D-implicação satisfazendo a propriedade* **I2** *(monotonicidade do segundo argumento), então tem-se: $S(x,N(x)) = 1, \forall x \in [0,1]$ (princípio do meio excluído).*

Prova.

$$\begin{aligned} S(x,N(x)) &= S(x,T(N(x),1)) \quad \textit{(como o neutro da T é 1, aplicou-se uma T)} \\ &= S(x,T(N(x),N(0)) \quad \textit{(comutatividade da S e T)} \\ &= S(T(N(0),(N(x)),x) \quad \textit{(definição de D-implicação)} \\ &= I_D(0,x) \geq I_D(0,0) = 1 \end{aligned}$$

Logo, S(x,N(x))=1

4.2.4 R-Implicações

Definição 19. *(BEDREGAL et al., 2007) Seja $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ uma t-norma contínua a esquerda. A função binária $I_R : [0,1]^2 \to [0,1]$ definida pela expressão:*

$$I_T(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leq y\} \tag{4.8}$$

é denominada R-implicação.

Uma R-implicação pode ser indicada pela expressão $I_R(x,y) = I_T(x,y)$

4.2.4.1 Propriedades de R-implicações

Proposição 35. *(BACZYNSKI; JAYARAM, 2008b, Teorema 2.5.14) Se $I_R : [0,1]^2 \to [0,1]$ é um R-implicação fuzzy então I_R satisfaz a propriedade* **I18***.*

Exemplo 5. *Considerando $T_M(x,y) = \min(x,y)$, tem-se que:*

$$I_{T_M}(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid \min(x,z) \leq y\}$$

Proposição 36. *(BACZYNSKI; JAYARAM, 2009, Theorem3.16) Seja $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ uma implicação. As seguintes proposições são equivalentes:*
(i) I é uma R-implicação gerada a partir de uma t-norma contínua à esquerda;

Tabela 4.1: Exemplos básicos de implicações e suas classes

Nome	Representação da I(x,y)	Classes	Propriedades
Kleene-Dienes	$I_{KD}(x,y) = max(1-x,y)$	S,QL	I1,I2,I3,I4,I5.
Reichenbach	$I_{RC}(x,y) = 1-x+xy$	S,QL	I1,I2,I3,I4,I5.
Łukasiewicz	$I_L(x,y) = min(1-x+y,1)$	S,R,QL	I1,I2,I3,I4,I5,I17,I18.
Fodor	$I_{FD}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y; \\ \max\{1-x,y\}, & \text{c.c.} \end{cases}$	S,QL	I1,I2,I3,I4,I5,I17,I18.
Dubois-Prade	$I_{DP}(x,y) = \begin{cases} y, & \text{se } x = 1; \\ 1-x, & \text{se } y = 0; \\ 1, & x < 1 \text{ and } y > 0 \end{cases}$	S,QL	I1,I2,I3,I4,I5,I17.
Gödel	$I_{GD}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y; \\ y, & \text{se } x > y. \end{cases}$	R	I1,I2,I3,I3,I4,I17, I18.
Goguen	$I_{GG}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y; \\ yx, & \text{se } x > y. \end{cases}$	R	I1,I2,I3,I3,I4,I17
Early Zadeh	$I_m(x,y) = max(1-x, min(x,y))$	S, QL	I1,I2,I3,I4,I5,I17,I18.
–	$I_{MK}(x,y) = max(1-x^2,y)$	QL	I1,I2,I3,I4, I5
Weber	$I_{D2}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 1; \\ y, & x = 1 \end{cases}$	QL	I1,I2,I3,I3,I4,I17.

(ii) I satisfaz as seguintes propriedades: **I4**, **I5**, **I17***e* **I18**, *além de ser contínua a direita com respeito a segunda variável.*

4.2.5 Exemplos de Implicações Fuzzy

A Tabela 4.1 apresenta uma lista de implicações fuzzy com suas respectivas classes e suas propriedades, frequentemente referenciadas em (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a; BACZYNSK; JAYARAM, 2009; SHI et al., 2008; BACZYNSKI, 2004; BACZYNSKI; JAYARAM, 2008b).

A seguir, são apresentadas as representações explícitas (S e Ql-implicações) e implícita (R-implicação) destas funções.

As Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam exemplos de QL-implicações, S-implicações e de R-implicações. Neste caso, apresentam-se as correspondentes funções de agregação e negação que determinam a representação explícita ou implícita de cada implicação fuzzy. Consideram-se os exemplos apresentados no Capítulo 3. (BACZYNSKI; JAYARAM, 2008a; BACZYNSK; JAYARAM, 2009; SHI et al., 2008; BACZYNSKI, 2004; BACZYNSKI; JAYARAM, 2008b; REISER et al., 2008; BACZYNSKI; JAYARAN, 2007).

Observe na tabela 4.4 considerando $S_M(x,y) = \max(x,y)$ e $N(x) = 1-x$, tem-se que a implicação de kleene-Dienes pode ser explicitamente descrita pela expressão de um S-implicação:

$$I_{KD}(x,y) = \max(1-x,y)$$

Tabela 4.2: Exemplos básicos de QL-implicações e seus agregadores básicos

S	T	N	$I_{S,N,T}$
S_L	T_L	N_C	I_{KD}
S_L	T_P	N_C	I_{RC}
S_L	T_M	N_C	I_L
S_{nM}	T_M	N_C	I_{FD}
S_D	T_P	N_C	I_{DP}
S_M	T_M	N_K	I_{MK}
S_P	T_M	N_{D2}	I_{D2}

Tabela 4.3: Exemplos básicos de R-implicações e seus agregadores básicos

T	I_T	Nome
T_nM	I_{FD}	Fodor
T_L	I_{LK}	Lukasiewicz
T_M	I_{GD}	Gödel
T_P	I_{GG}	Goguen

Tabela 4.4: Exemplos básicos de S-implicações e seus agregadores básicos

S	N	$I_{S,N,T}$	Nome
S_M	N_C	I_{KD}	Kleene-Dienes
S_P	N_C	I_{RC}	Reichenbach
S_L	N_C	I_L	Lukasiewicz
S_{nM}	N_C	I_{FD}	Fodor
S_D	N_C	I_{DP}	–
S_M	N_K	I_{MK}	-

Nesta mesma tabela, verifica-se que a implicação de LuKasiewics que é igual ao mínimo entre 1 e 1-x+y é uma S-implicação, ou seja, $I_L(x, y) = min(1, 1 - x + y)$:

$$
\begin{aligned}
I_{SN}(x, y) &= S(N(x), y) \\
&= S(1 - x, y) = min(1 - x + y, 1)
\end{aligned}
$$

Na tabela 4.2, sejam: $S(x, y) = S_P(x, y) = x + y - xy$ (apresentada na Tabela 3.2) ; $T(x, y) = T_P(x, y) = x.y$ (apresentada na Tabela 3.1) e $N(x) = N_{D2}$ (descrita no exemplo 1 na seção 3.2.1.). Então a implicação de Weber pode ser explicitamente representada como uma QL-implicação determinada por estas funções de agregação de Gödel:

$$
\begin{aligned}
I_{D2}(x, y) &= S_P(N_{D2}(x), T_M(x, y)) \\
&= N_{D2}(x) + T_M(x, y) - N_{D2}(x).min(x, y)
\end{aligned}
$$

Ou ainda, $y = x$, se $x = 1$; e $1 + min(x, y) - min(x, y) = 1$, se $x < y$.

Na Tabela4.3, mostra-se que a Implicação de Gödel tem uma representação implícita, ou seja, I_G é uma R-implicação se considerarmos a t-norma T_M

$$
I_G(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{Se } x \leq y \\ y, & \text{c.c;} \end{cases}
$$

Mais detalhadamente, considerando a t-norma $T_M(x, y) = min(x, y)$ e a definição de R-implicação, tem-se que:

(i) $x \leq y$, logo $T(x, 1) \leq y$. Portanto $sup\{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\} = 1$. Sejam, $I_G(x, y) = 1$se $x \leq y$.

(ii)$x > y$. Neste caso, consideram-se duas análise:

a) $x \leq t$, e $T(x, t) = min(x, t) = x \leq y$, o que resulta numa contradição; e

b) $x > t$, e $T(x, t) = t \leq y$. Logo $sup\{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y$, ou ainda $I(x, y) = y\}$

Portanto, por (i) e (ii) a implicação de Gödel é uma R-implicação.

4.3 Automorfismos e Implicações Fuzzy

Considerando que os automorfismos podem gerar novas implicações, as quais preservam importantes propriedades algébricas, esta seção apresenta um estudo da ação de um automorfismo sobre as principais classes de implicação fuzzy.

4.3.1 Automorfismos agindo sobre S-implicações

Na seguinte Proposição, será mostrado como um automorfismo age nas S-implicações , gerando novas S-implicações .

Proposição 37. *(BEDREGAL et al., 2010) Seja $\phi : U \to U$ um automorfismo e $I_{S,N} : U^2 \to U$ uma S-implicação . Então $I^{\phi}_{S,N} : U^2 \to U$ é uma S-implicação, definida por*

$$
I^{\phi}_{S,N} = I_{S^{\phi},N^{\phi}}. \tag{4.9}
$$

Prova. *Considerando $x, y \in U$, segue-se que*

$$
\begin{aligned}
I^{\phi}_{S,N}(x,y) &= \phi^{-1}(I_{S,N}(\phi(x),\phi(y))) \\
&= \phi^{-1}(S(N(\phi(x)),\phi(y)))) \\
&= \phi^{-1}(S(\phi \circ \phi^{-1}(N(\phi(x))),\phi(y))) \\
&= \phi^{-1}(S(\phi(N^{\phi}(x)),\phi(x,y)) \\
&= S^{\phi}(N^{\phi}(x),y) = \mathbb{I}_{S^{\phi},N^{\phi}}(x,y).
\end{aligned}
$$

A partir da Proposição 37 a comutatividade da Classe das S-implicações sobre a ação de um automorfismo ϕ é representada no diagrama da Fig. 4.1

$$
\begin{tikzcd}
C(S) \times C(N) \arrow[r, "Eq.(4.2)"] \arrow[d, "{Eq.(3.14), Eq.(3.16)}"'] & C(I_{S,N}) \arrow[d, "Eq.(3.12)"] \\
C(S^{\phi}) \times C(N^{\phi}) \arrow[r, "Eq.(4.9)"] & C(I^{\phi}_{S,N})
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.1: Comutatividade da classe das S-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ

4.3.2 Automorfismo agindo sobre QL-implicações

Proposição 38. *Seja $I_{S,N,T}$ uma QL-implicação onde T é uma t-norma contínua e estrita. Então existe um automorfismo $\phi : U \to U$ tal que*

$$I^{\phi}_{S,N,T} = I^{\phi}_{S^{\phi},N^{\phi},T^{\phi}} \tag{4.10}$$

$$I^{\phi}_{S,N,T} = \phi^{-1}(S(N(\phi(x)), T(\phi(x),\phi(y)) \tag{4.11}$$

Considerando$x, y \in \mathbf{U}$, segue-se que:

Prova.

$$
\begin{aligned}
S^{\phi}(N^{\phi}(x), T^{\phi}(x,y)) &= S^{\phi}(\phi^{-1}(N(\phi(x)),\phi^{-1}(T(\phi(x),\phi(y))) \\
&= \phi^{-1}(S(N(\phi(x)), T(\phi(x)\phi(y))) \\
&= I^{\phi}_{S,N,T}(x,y)
\end{aligned}
$$

A partir da Proposição 38 a comutatividade da Classe das S-implicações sobre a ação de um automorfismo ϕ é representada no diagrama da Fig. 4.2

Nas próximas proposições são apresentadas outras análises referentes à ação de automorfismos em QL-implicações.

Proposição 39. *(BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003, Teorema 10) Seja $I_{S,N,T}$ uma QL-implicação, onde T é uma t-norma contínua dada por $T(x, N(x)) = 0$. Então existe um*

$$\begin{tikzcd}
C(S) \times C(N) \times C(T) \arrow[r, "Eq.(4.5)"] \arrow[d, "{Eq.(3.14), Eq.(3.16), Eq.(3.13)}"'] & C(I_{S,N,T}) \arrow[d, "Eq.(3.12)"] \\
C(S^{\phi}) \times C(N^{\phi}) \times C(T^{\phi}) \arrow[r, "Eq.(4.12)"] & C(I^{\phi}_{S,N,T})
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2: Comutatividade da classe das QL-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ

automorfismo $\phi : U \to U$ *tal que*

$$I_{S,N,T}(x, y) = S\left((N(x), T^{\phi}_{L}(x, y)\right) \text{ e } N(x) \leq N^{\phi}_{C}(x). \tag{4.12}$$

$T^{\phi}_{L}(x, y) = \phi^{-1}(\max(\phi(x) + \phi(y) - 1, 0))$ é o automorfismo ϕ agindo sobre a t-norma de Lukasiewicz .

Corolário 2. *(BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003, Corolário 6). Seja* $I_{S,N,T}$ *uma QL-implicação, onde* T *é uma t-norma contínua dada por* $T(x, N(x)) = 0$. *Então* $I_{S,N,T}(x, N(x)) = N(x)$, $\forall x \in U$.

Proposição 40. *(MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2007) Seja* $I_{S,N,T}$ *uma QL-implicação, onde* $N = N^{\phi}_{C}$. *Então existe um automorfismo* $\phi : U \to U$ *tal que*

$$I_{S,N,T}(x, y) = \phi^{-1}(\min(1 - \phi(x) + \phi(T(x, y)), 1))) = \phi^{-1}(1 - \phi(x) + \phi(T(x, y))). \tag{4.13}$$

Proposição 41. *(SHI; RUAN; KERRE, 2007, Theorem 15). Seja* ϕ *e* ϕ' *um automorfismo em* U *tal que a QL-implicação* $I_{S^{\phi}_{L},N,T^{\phi'}_{L}}$ *satisfaz a Propriedade* ***I10*** *se, e somente se,* N *satisfaz*

$$N^{\phi}_{C}(x) \leq N(x) \leq N^{\phi'}_{C}(x).$$

e $I_{S^{\phi}_{L},N,T^{\phi'}_{L}}$ *pode ser representada como*

$$I_{S^{\phi}_{L},N,T^{\phi'}_{L}}(x, y) = \begin{cases} N(x), & T^{\phi'}_{L}(x, y) = 0; \\ y, & 0 < T^{\phi'}_{L}(x, y) < N^{\phi}_{C}(x); \\ 1, & T^{\phi'}_{L}(x, y) \geq N^{\phi}_{C}(x). \end{cases}$$

4.3.3 Automorfismos agindo sobre D-implicações

A seguir, mostra-se que a ação de um automorfismo preserva uma D-implicação.

Proposição 42. *Seja* $\phi : U \to U$ *um automorfismo e* $I : U^2 \to U$ *uma D-implicação . Então* $I^{\phi} : U^2 \to U$ *também é uma D-implicação.*

Prova. *Isto é suficiente para verificar as seguintes equações:*

$$I^{\phi}_{S,T,N}(x, y) = S^{\phi}(T^{\phi}(N^{\phi}(x), N^{\phi}(y)), y) \tag{4.14}$$

Considerando $x, y \in U$, *tem-se que*

$$
\begin{aligned}
I^{\phi}_{S,T,N}(x,y) &= \phi^{-1}(I_{S,T,N}(\phi(x),\phi(y))) \\
&= \phi^{-1}(S(T(N(\phi(x),N\phi(y))),\phi(y)) \\
&= \phi^{-1}(S(T(\phi(\phi^{-1}(N\phi(x)))),\phi(\phi^{-1}(N\phi(y))))),\phi(Y) && \textit{pela bijetividade de } \phi \\
&= \phi^{-1}(S(\phi(x),N\phi((\phi^{-1}(T(\phi(N^{\phi})(x)),\phi(N^{\phi}(y)))))),\phi(y)) \\
&= S^{\phi}(T^{\phi}(N^{\phi}(x),N^{\phi}(y)),y)
\end{aligned}
$$

A contrapositiva das implicações discutidas nas Proposições 39, 40 e 41 podem ser combinadas para o caso das D-implicações.

A partir da Proposição 42 a comutatividade da Classe das D-implicações sobre a ação de um automorfismo ϕ é representada no diagrama da Fig. 4.3

$$
\begin{tikzcd}
C(S)\times C(T)\times C(N) \arrow[r, "Eq.(4.7)"] \arrow[d, "Eq.(3.14)Eq.(3.13){,}\ Eq.(3.16)"'] & C(I_{S,T,N}) \arrow[d, "Eq.(3.12)"] \\
C(S^{\phi})\times C(T^{\phi})\times C(N^{\phi}) \arrow[r, "Eq.(4.14)"] & C(I^{\phi}_{S,T,N})
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.3: Comutatividade da classe das D-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ

4.3.4 Automorfismos agindo sobre R-implicações

Proposição 43. *Seja $I_R(x,y)$ uma R-implicação e T uma t-norma contínua à esquerda. então existe um automorfismo $\phi : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$, tal que*

$$I^{\phi}_{R}(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T^{\phi}(x,z) \leq y\} = I_{T^{\phi}}(x,y) \tag{4.15}$$

Prova. $\forall x,y \in \mathbf{U}$, *tem-se que:*

$$
\begin{aligned}
I^{\phi}_{R}(x,y) &= \phi^{-1}(I_R(\phi(x),\phi(y))) \\
&= \phi^{-1}\sup\{z \in [0,1] \mid T(\phi(x),\phi(z) \leq \phi(y)\} \\
&= \sup\{z \in [0,1] \mid \phi^{-1}(T(\phi(x),\phi(z)) \leq \phi(y)\} \\
&= \sup\{z \in [0,1] \mid (T^{\phi}(x,y)) \leq y\} \\
&= I_{T^{\phi}}(x,y)
\end{aligned}
$$

A partir da Proposição 43 a comutatividade da Classe das R-implicações sobre a ação de um automorfismo ϕ é representada no diagrama da Fig. 4.4

4.4 Considerações Finais

Este capítulo apresentou as principais classes de implicação fuzzy, as quais podem ser obtidas a partir da representação explícita e implícita baseadas em agregadores e negações fuzzy. Também mostrou-se que os automorfismos preservam as principais propriedades e estas representações. O próximo capítulo apresenta as implicações, que não podem ser classificadas nesta representação.

$$\begin{tikzcd}
C(T) \arrow[r, "Eq.(4.8)"] \arrow[d, "Eq.(3.13)"'] & C(I_T) \arrow[d, "Eq.(3.12)"] \\
C(T^{\phi}) \arrow[r, "Eq.(4.15)"] & C(I_T^{\phi})
\end{tikzcd}$$

Figura 4.4: Comutatividade da classe das R-implicações sob a ação de um automorfismo ϕ

5 REPRESENTAÇÃO AXIOMÁTICA DE IMPLICAÇÕES FUZZY

A necessidade de representar a experiência e habilidade (*expertise*) de um perito na modelagem de sistemas especialistas deve-se ao fato de que grande parte do correspondente conhecimento consiste em uma sequência de declarações, as quais podem ser interpretadas a partir da formalização e estudo de implicações em sistemas de inferência baseados em lógica fuzzy.

O conhecimento que se tem de sistemas complexos é muitas vezes incompleto, e, por conseguinte, tem-se de confiar nas declarações de peritos. Essas declarações são geralmente formuladas não em termos matemáticos, mas pelo uso de palavras na linguagem natural. Para modelagem destas situações, diversos operadores de implicação fuzzy têm sido propostos, a maioria deles se encaixam em uma das duas classes:

(i) operações de implicação que são baseadas em uma representação explícita de uma implicação, em termos de funções de agregação (t-normas, t-conormas, uninormas, uniconormas, t-seminormas, t-semiconormas) e funções de negação fuzzy;

(ii) operações de implicação fuzzy baseadas em representação implícita, envolvendo além de funções de agregação e negações fuzzy, também outras funções (supremo, ínfimo, mínimo e máximo).

No entanto, uma significativa amostra de operações de implicação fuzzy não podem ser naturalmente representadas considerando apenas estas duas classes. Para descrever essas operações, em (HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006), foi proposta uma nova classe de operações de implicação chamada A-implicações cuja representação deve ser axiomaticamente descrita.

Neste contexto, a Lógica Fuzzy tem-se mostrado uma metodologia para formalizar tais declarações. A importância de uma formalização e um estudo teórico baseado na axiomatização para representação de implicações fuzzy justifica os estudos apresentados neste capítulo(TRILLAS; VALVERDE, 1985; YAGER, 2004a).

Na próxima seção, mostra-se que a implicação de Yager(YAGER, 1980) satisfaz muitas das propriedades apresentadas na Seção 4.1.1, incluindo neste capítulo outras propriedades importantes para representação baseadas em axiomatização.

De forma análoga, a implicação G_h e várias outras operações de implicação frequentemente utilizadas, também satisfaz muitas destas propriedades, mas não pertencem às classes de implicações com representação explícita ou implícita. A classe das G_h-implicações fuzzy foi introduzida em (HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006), mostrando que não pertence às classes das S-implicações, QL-implicações e das R-implicações fuzzy.

Na sequência, outras propriedades de implicações fuzzy serão consideradas, as quais são relevantes para a axiomatização proposta em (TURSKEN; KREINIVICH; YAGER, 1998) na representação das A-implicações. Para tal, seja T uma t-norma:

I19 : $I(x, T(y, z)) = T(I(x, y), I(x, z))$;

I20 : $I(T(x, y), z) = I(x, I(y, z))$;

I21 : $T(I(x, y), I(N(x), y)) = y$;

I22 : $T(I(0.5, y), I(0.5, y)) = y$.

Como já discutido no Capítulo 3, desde que uma t-norma consistiu numa generalização da conjunção Booleana, tem-se que a Propriedade **I19** estende a interpretação da bicondicional Booleana: $x \to (y \wedge z) \equiv (x \to y) \wedge (x \to z)$, significando que se x implica $y \wedge z$, então x implica y e x implica z.

De forma análoga, na Propriedade **I20**, estende-se a bicondicional Booleana $x \to (y \to z) \equiv (x \wedge y) \to z)$. Assim, se x implica $y \wedge z$, isso significa que, quando tem-se x, então a partir de y, pode-se deduzir z, e vice-versa.

Na lógica clássica, pela Propriedade **I21**, se x implica que y implica z, então pode-se dizer que a partir de ambos, x e y, pode-se deduzir z. Por outro lado, se $x \wedge y$ implica z, significa que se x é válido então de y, pode-se implicar z.

E, a Propriedade **I22**, interpretando a expressão Booleana que diz, quando se tem uma declaração sobre a qual nada se sabe (por esta razão, afirma-se que o grau de crença em x e $\neg x$ é igual a 0.5) e, se y pode ser deduzido de ambos (x e $\neg x$), então y deve ser verdade e vice-versa.

5.1 Classe de A-implicações Fuzzy

A classe das A-implicações, proposta em (TURSKEN; KREINIVICH; YAGER, 1998) pode ser descrita considerando a não-comutatividade de t-normas, mas esta não é uma expressão natural para tais conectivos fuzzy.

Para uma melhor representação, propõe-se em (HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006) a definição de uma terceira classe de implicações baseadas em axiomas que são traduzidos por algumas das propriedades já descritas anteriormente, neste texto.

Definição 20. *(HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006, Section 2.1 Main Result) Uma implicação fuzzy $I : U^2 \to U$ pertence a classe das A-implicações se existem uma t-norma $T : U^2 \to U$ e uma negação fuzzy $N : U \to U$ tal que I verifica algumas das propriedades* **I11***,* **I19***,* **I20***,* **I21** *e* **I22**.

Com base na definição de particulares $t-$normas e negações fuzzy, expressões para as implicações fuzzy que não pertencem às classes de representação explícita e nem às classes de representação implícitas, mas que podem pertencer a classe das A-implicações, são reportadas na Proposição 44:

Proposição 44. *(TURSKEN; KREINIVICH; YAGER, 1998, Section 2 Main Result) Sejam* $T : U^2 \to U$*,* $T(x,y) = x \cdot y$ *a t-norma contínua, denominada norma triangular produto, e* $N : U \to U$*,* $N(x) = 1 - x$ *a negação fuzzy padrão. Assume-se que* $I : U^2 \to U$ *é uma função contínua em* U^2*, exceto nos seus pontos extremos* $(0,0)$ *e* $(1,1)$*. Então I satisfaz a Propriedade* **I1** *e:*

(i) *se I também satisfaz as Propriedades **I19** e **I20**, para todo* $r \geq 0$*, a função I tem representação dada pela expressão:*

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & se\ x = 0 \quad e \quad y = 0; \\ y^{x^r}, & c.c. \end{cases} \tag{5.1}$$

(ii) *se I também satisfaz as propriedades **I19**, **I20** e **I22**, então a função I tem representação dada pela expressão:*

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & se\ x = y = 0\ ; \\ y^{x}, & c.c. \end{cases} \tag{5.2}$$

(iii) *se I também satisfaz as propriedades, **I20** e **I21**, então a função I tem representação dada pela expressão:*

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & se\ x = y = 0\ ; \\ y^{x}, & c.c. \end{cases} \tag{5.3}$$

(iv) *se I também satisfaz as propriedades **I19** e **I11**, para todo* $k > 0$*, então a função I tem representação dada pela expressão:*

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & se\ x = y = 0\ ou\ x = y = 1\ ; \\ 0, & se\ x = 1\ e\ y \neq 1\ ; \\ 0, & se\ y = 0\ e\ x \neq 0\ ; \\ e^{-k.ln(1-x).lny}, & c.c. \end{cases} \tag{5.4}$$

5.2 Implicação de Yager

Nesta subseção, apresentam-se as principais contribuições deste trabalho, referente ao estudo da subclasse de implicação fuzzy denominada implicação de Yager e denotada po I_Y. Mostra-se que I_Y satisfaz muitas das propriedades apresentadas no Capítulo 3, incluindo propriedades extras referentes à axiomatização da classe de A-implicações.Também, consideram-se o estudo e a prova de que as propriedades de I_Y são preservadas quando da ação de automorfismos.

Proposição 45. *A função binária proposta por Yager (YAGER, 2004b) e apresentada na Eq.(5.5)*

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & se\ x = 0 \quad e \quad y = 0; \\ y^{x}, & caso \quad contrário \end{cases} \tag{5.5}$$

é uma implicação fuzzy denominada implicação de Yager.

Prova. *Verifica-se de imediato, com base na Definição 17.*

Proposição 46. *I_Y satisfaz as seguintes propriedade:* **I2 – I5**, **I9**, **I12 – I13** *e* **I18 – I22**.

Prova. *Seja $x, y, z \in U$. Tem-se que:*

I2 *: Se $x \leq z$ então $I_Y(x, y) = y^x \geq y^z = I_Y(z, y)$;*

I3 *: Se $y \leq z$ então $I_Y(x, y) = y^x \leq z^x = I_Y(x, z)$;*

I4 *: $I_Y(1, y) = y^1 = y$;*

I5 *: $I_Y(x, I_Y(y, z)) = (y^z)^x = y^{zx} = y^{xz} = y^{z^x} = I_Y(y, I_Y(x, z))$;*

I9 *: $I_Y(x, 1) = 1^x = 1$;*

I12 *: $I_Y(0, x) = x^0 = 1$;*

I13 *: Como I_Y satisfaz a propriedade* **I3** *e supondo $y \geq 0$, então $I(x, y) \geq I(x, 0) = N_I(x, 0) = N_I(x)$;*

I18 *: Supondo-se agora $x \leq y$. Logo, se $x = y = 0$ ou $x = y = 1$ ou ainda, se $y = 1$ e $x \leq 1$, tem-se que $I_Y(x, y) = y^x = 1$. Portanto, I_Y satisfaz a condição de contorno;*

I19 *: Sempre que $T(x, y) = x \cdot y$, $I_Y(x, T(y, z)) = I_Y(x, y \cdot z) = (y \cdot z)^x = y^x \cdot z^x = T(I_Y(x, y), I_Y(x, z))$;*

I20 *: Sempre que $T(x, y) = x \cdot y$, $I_Y(T(x, y), z) = I_Y(x \cdot y, z) = z^{x \cdot y} = (z^y)^x = I_Y(x, I_Y(y, z))$;*

I21 *: Sempre que $T(x, y) = x \cdot y$, $T(I_Y(x, y), I_Y(N(x), y)) = y^x \cdot y^{1-x} = y$;*

I22 *: Sempre que $T(x, y) = x \cdot y$, $T(I_Y(0.5, y), I_Y(0.5, y)) = y^{0.5} \cdot y^{0.5} = y$.*

Portanto, a implicação de Yager satisfaz **I2 – I5**, **I9**, **I12**, **I13** *e* **I18 – I22**.

Proposição 47. *As propriedades* **I6 – I8**, **I10**, **I11** *e* **I4 – I12** *não são verificadas pela implicação fuzzy de Yager dada pela Definição 5.5.*

Prova. *Para demonstrar esta proposição, consideram-se contra-exemplos na prova.*

I6 *: Seja $x = 0.1$ e $y = 0.2$. Então, tem-se que $I_Y(x, I_Y(x, y)) = (0.2^{0.1})^{0.1} \neq 0.2^{0.1} = I_Y(x, y)$. Portanto, Y_I não verifica a propriedade **I6**;*

I7 *: Se $x = 0.9$, $I_Y(x, N(x)) = (1 - 0.1)^{0.1} = (0.9)^{0.1} \neq 0.9 = 1 - 0.1 = N(x)$. Portanto, Y_I não verifica a propriedade **I7**;*

I8 *: $I_Y(x, 0) = 0^x = 1$ se $x = 0$, e $I_Y(x, 0) = 0$, caso contrário. Logo, I_Y não verifica a propriedade **I8**;*

I10 *: Se $x = 0.5$ e $y = 0.1$, $I_Y(x, y) = (0.1)^{0.5} \leq 0.1$. Logo, I_Y não verifica a propriedade **I10**;*

I11 *: Considerando-se $I_Y(N(y), N(x)) = N(x)^{N(y)}$, tem-se que $x = N(y)$ e $y = N(x)$ ou $x = y = 0$. Logo I_Y não satisfaz a simetria contrapositiva;*

I14 : *Se $x = 1$ e $y = 0$ $I_Y(x,y) = 0^1 = 0$, se $x = 0.5$ e $y = 0$, então $I_Y(0.5,0) = 0$, não verificando a propriedade **I14**;*

I15 : *Prova imediata;*

I16 : *Supondo-se que $x > y$. Logo, se $y \neq 0$ tem-se que $I_Y(x,y) = y^x \neq 0$. Portanto, I_Y não satisfaz o princípio da ordenação;*

I17 : *Se $x = 0.1$, $I_Y(x,x) = I_Y(0.1,0.1) = (0.1)^{0.1} \cong 0.8 \neq 1$, logo não satisfaz o princípio da identidade;*

Proposição 48. *I_Y não satisfaz a Propriedade **I11** nem a Propriedade **I12**.*

Prova. *Primeiro, por definição tem-se que $I_Y(N(y),N(x)) = N(x)^{N(y)}$. Então, exceto quando $x = N(y)$ and $y = N(x)$ or $x = y = 0$, I_Y não deverá satisfazer a lei da contraposição. Agora, supunha $x \leq y$. Logo, exceto quando $x = y = 0$ ou $y = 0$ ou $x = 0$, $I_Y(x,y) = y^x$ não irá verificar a Propriedade***I12***.*

Proposição 49. *I_Y não é uma S-implicação nem uma R-implicação.*

Prova. *Pela proposição 48, tem-se que I_Y não satisfaz a Propriedade **I11** e nem satisfaz a Propriedade **I12**. Portanto, baseando-se nas Proposições 23 e 36, I_Y não é S-implicação nem R-implicação.*

Corolário 3. *I_Y não é uma QL-implicação.*

Prova. *Pela Proposição 46, I_Y satisfaz a Propriedade I5 mas pela Proposição 96 I_Y não é uma S-implicação. Portanto, Pela Proposição 32, I_Y também não é uma QL-implicação.*

5.2.1 ϕ-conjugada da Implicação de Yager

Considerando o Exemplo 4, a implicação de Yager definida pela Eq. 5.5 e a implicação $I_{Y^n} : U^2 \to U$ dada pela Eq. (5.6):

$$I_{Y^n}(x,y) = 1, \text{ se } x = y = 0; \text{e } I_{Y^n}(x,y) = y^{x^n}, \text{ c.c.} \tag{5.6}$$

tem-se que I_Y e I_{Y^n} são funções conjugadas.

Proposição 50. *Seja ϕ um automorfismo. A função conjugada I_Y^{ϕ} de I_Y é também uma implicação fuzzy.*

Prova. *Considerando I_Y uma implicação Yager, cuja definição é dada pela Eq. (5.5).*

I1: *Segundo a Definição 15, tem-se que*
$I_Y^{\phi}(0,0) = \phi^{-1}(I_Y(\phi(0),\phi(0))) = \phi^{-1}(I_Y(0,0)) = 1$; $I_Y^{\phi}(0,1) = \phi^{-1}(I_Y(\phi(0),\phi(1))) = \phi^{-1}(I_Y(0,1)) = 1$;
$I_Y^{\phi}(1,1) = \phi^{-1}(I_Y(\phi(1),\phi(1))) = \phi^{-1}(I_Y(1,1)) = 1$; $I_Y^{\phi}(1,0) = \phi^{-1}(I_Y(\phi(1),\phi(0))) = \phi^{-1}(I_Y(1,0)) = 0$.

Assim, a conjugada da implicação de Yager é também uma implicação fuzzy.

Proposição 51. *Seja ϕ um automorfismo e I_Y^{ϕ} a conjugada da implicação de Yager I_Y. Para cada $k \in K = \{2,3,4,5,9,12,13,18,19,20,21,22\}$, I_Y satisfaz* **Ik** *se, e somente se, a conjugada correspondente I_Y^{ϕ} também satisfaz* **Ik**.

Prova. *($\Rightarrow$) Considerando I_Y a implicação de Yager , definida pela Eq. (5.5). Logo,*

I2: *Se $x \leq z$ então $\phi(x) \leq \phi(z)$ logo, I_Y satisfaz **I2**, $I_Y(\phi(x), \phi(y)) \geq I_Y(\phi(z), \phi(y))$. Desde que ϕ seja uma função contínua e estritamente crescente que satisfaça as condições de contorno. $I_Y^\phi(x, y) = \phi^{-1}(I(\phi(x), \phi(y)))) \geq \phi^{-1}(I(\phi(z), \phi(y))) = I_Y^\phi(z, y)$.*

I3: *Se $y \leq z$ então $\phi(y) \leq \phi(z)$ logo, I_Y satisfaz **I3**, $I_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq I_Y(\phi(x), \phi(z))$. Portanto, $I_Y^\phi(x, y) = \phi^{-1}(I_Y(\phi(x), \phi(y)))) \leq \phi^{-1}(I_Y(\phi(x), \phi(z))) = I_Y^\phi(x, z)$.*

I4: *Se I_Y satisfaz **I4**, $I_Y^\phi(1, y) = \phi^{-1}(I_Y(\phi(1), \phi(y)))) = \phi^{-1}(I_Y(1, \phi(y)))) = \phi^{-1}(\phi(y)) = y$.*

I5: *Considerando que I_Y satisfaz **I5**, tem-se*

$$
\begin{aligned}
I_Y^\phi(x, I_Y^\phi(y, z)) &= \phi^{-1}(I_Y(\phi(x), \phi(I_T^\phi(y, z))))) \quad \textit{by Eq. 3.12, Def. 14}\\
&= \phi^{-1}(I_Y(\phi(x), I_Y(\phi(y), \phi(z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.12, Def. 14}\\
&= \phi^{-1}(I_Y(\phi(y), I_Y(\phi(x), \phi(z)))), \quad \textit{pela propriedade } \mathrm{I7}\\
&= \phi^{-1}(I_Y(\phi(y), (\phi(\phi^{-1}(I_Y(\phi(x), \phi(z)))))), \quad \textit{pela Eq. 3.12, Def. 14}\\
&= I_Y^\phi(y, I_Y^\phi(x, z)), \quad \textit{pela Eq. 3.12, Def. 14}
\end{aligned}
$$

I9: *Se I_Y satisfaz **I9** então $I_Y^\phi(x, 1) = \phi^{-1}(I(\phi(x), \phi(1)))) = \phi^{-1}(I(\phi(x), 1))) = \phi^{-1}(1) = 1$.*

I12: *Se I_Y satisfaz **I7** então $I_Y^\phi(0, y) = \phi^{-1}(I(\phi(0), \phi(y)))) = \phi^{-1}(I(0, \phi(y)))) = \phi^{-1}(1) = 1$. Assim, I_Y^ϕ verifica a propriedade da dominância da falsidade, e I_Y^ϕ satisfaz a propriedade da dominância da verdade do consequente.*

I13 *: Se I_Y satisfaz a propriedade* **I3** *e supondo $y \geq 0$, então $I^\phi(x, y) \geq I^\phi(x, 0) = N_I^\phi(x, 0)$.Portanto I_Y^ϕ satisfaz a propriedade* **I13**

I19: *Considerando que I_Y satisfaz **I19** sempre que $T(x, y) = x \cdot y$ então*

$$
\begin{aligned}
I_Y^\phi(x, T^\phi(y, z)) &= \phi^{-1}(I_Y(\phi(x), \phi(T^\phi(y, z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.12, Def. 14}\\
&= \phi^{-1}(I_Y(\phi(x), T(\phi(y), \phi(z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.12, Eq. 3.13}\\
&= \phi^{-1}(T(I_Y(\phi(x), \phi(y)), I_Y(\phi(x), \phi(z)))) \quad \textit{pela propriedade } \boldsymbol{I19}\\
&= \phi^{-1}(T((\phi \circ \phi^{-1})I_Y(\phi(x), \phi(y)), (\phi \circ \phi^{-1})I_Y(\phi(x), \phi(z)) \quad \textit{pela Eq. 3.13}\\
&= T^\phi(I_Y^\phi(x, y), I_Y^\phi(x, z)) \quad \textit{pela propriedade } \boldsymbol{I19} \quad \textit{e} \quad \textit{Eq. 3.12}
\end{aligned}
$$

*Portanto, I_Y^ϕtambém satisfaz **I19**.*

I20 *: Se I_Y é uma implicação fuzzy que satisfaz **I20**, então*

$$
\begin{aligned}
I_Y^\phi(T^\phi(x, y), z) &= \phi^{-1}(I_Y(\phi(T^\phi(x, y), \phi(z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.12, Def. 14}\\
&= \phi^{-1}(I_Y(T(\phi(x), \phi(y)), \phi(z))) \quad \textit{pela Eq. 3.12, Eq. 3.13}\\
&= \phi^{-1}(I_Y(\phi(x), I_Y(\phi(y), \phi(z)))) \quad \textit{pela propriedade } \boldsymbol{I20}\\
&= \phi^{-1}(I_Y(\phi(x), \phi(I_Y^\phi(y, z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.12} \quad \textit{e} \quad \textit{Eq. 3.13}\\
&= I_Y^\phi(x, I_Y^\phi(y, z)) \quad \textit{pela Eq. 3.12}
\end{aligned}
$$

*Portanto, I_Y^ϕ também satisfaz **I20**.*

I21 : *Supondo I_Y uma implicação fuzzy que satisfaz **I21**, assim*

$$
\begin{aligned}
T^{\phi}(I_Y^{\phi}(x,y), I_Y^{\phi}(N^{\phi}(x),y)) &= \phi^{-1}(T(\phi(I_Y^{\phi}(x,y)), \phi(I_Y^{\phi}(N^{\phi}(x),z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.13, Def. 14}\\
&= \phi^{-1}(T(I_Y(\phi(x),\phi(y)), I_Y(\phi(N^{\phi}(x)),\phi(z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.12}\\
&= \phi^{-1}(T(I_Y(\phi(x),\phi(y)), I_Y(N(\phi(x)),\phi(z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.16}\\
&= \phi^{-1}(y),\phi(z))) = 1 \quad \textit{pela propriedade } \textbf{\textit{I10}} \quad \textit{e} \quad \textit{Eq. 3.12}
\end{aligned}
$$

portanto, conclui-se que $T^{\phi}(I_Y^{\phi}(x,y), I_Y^{\phi}(N^{\phi}(x),y)) = y$.

Assim, quando I_Y satisfaz **Ik**, *a sua conjugada I_Y^{ϕ} também satisfaz* **Ik**.
($\Leftarrow$) A prova inversa pode ser obtida de maneira análoga.

Corolário 4. *I_Y^{ϕ} não é uma S-implicação, nem QL-implicação e nem uma R-implicação.*

Prova. *Isto é consequência das Proposições 23, 32, 35 e 51.*

Proposição 52. *A implicação de Yager e suas implicações conjugadas são A-implicações.*

Prova. *Baseado-se na Proposição 44, na Proposição 45 I_Y é uma A-implicação. Além disso, pela Proposição 50 e Proposição 51, I_Y^{ϕ} é também uma A-implicação.*

Exemplo 6. *De acordo com o Ex. 4,tem-se $\phi(x) = x^n$, I_Y^{ϕ} e $I_{Y^n}^{\phi}$ são conjugados entre si.*

5.3 G_h-implicações Fuzzy

Na sequência, as principais proposições são reportadas, fundamentando o estudo da conjugada $I_{G_h}^{\phi}$ apresentada logo a seguir.

Definição 21. *(HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006, Definição 1) Sejam N_C a negação padrão, T_P a t-norma do produto e S_M a t-conorma do máximo, tais que a tripla (T_M, S_M, N_C) satisfaz as Leis de Morgan. Considere também a função $sg : \mathbf{R} \rightarrow U$, onde*

$$
sg(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x > 0,\\ 0, & \textit{caso} \quad \textit{contrário; } x \leq 0 \end{cases} \tag{5.7}
$$

A função $G_h : U^2 \rightarrow U$ definida pela expressão:

$$
I_{N_C,S,T}(x,y) = G_h(x,y) = (N_C(sg(x-y)) \cdot S_M(T_M(N(y),N(x)),y)) \tag{5.8}
$$

é uma classe de implicações fuzzy.

Observe que seja a função G_h dada pela Eq. 5.8, G_h se reduz a expressão:

$$
G_h(x,y) = (1 - sg(x-y)) \cdot \max(1 - \max(x,y), y). \tag{5.9}
$$

Ou seja, se $x \leq y$ pela expressão 5.9, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
G_h(x,y) &= (1 - sg(x-y)) \cdot \max(\min(1-x, 1-y), y) \quad \text{pela Proposição 8,Proposição 4 e Eq.3.5}\\
&= (1 - sg(x-y)) \cdot \max(1-y, y)\\
&= \max(1-y, y))
\end{aligned}
$$

Caso contrário, se $x > y$ então $sg(x-y) = 0$, e $G_h(x, y) = 0 = (1-sg(x-y))\cdot\max(1-y, y)$.

Proposição 53. *(HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006, Proposição 1) Seja sg a função dada pela Eq. 5.7 A função $G_h : U^2 \to U$ definida pela expressão:*

$$G_h(x, y) = (1 - sg(x - y)) \cdot \max(1 - y, y) \tag{5.10}$$

é uma implicação fuzzy.

Proposição 54. *(HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006, Proposição 2) A função G_h, dada pela Eq. (5.8), satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) ***I2**, para todo $x, y, x \in U$;*

(ii) ***I3** se $0.5 \leq y$;*

(iii) ***I5** se $0.5 \leq x, y$;*

(iv) *se $0.5 \leq x, y$ então $G_h(x, y) \geq G_h(N(y), N(x))$;*

(v) *G_h é contínua.*

Proposição 55. *(HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006, Proposição 3) A função G_h, dada pela Eq. (5.8), satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) ***I19** quando $0.5 \leq x \leq y \leq z$;*

(ii) ***I11** quando $x \geq y$;*

(iii) ***I21** quando $S(x, N(x)) \leq y$;*

(iv) ***I22** quando $y \in [0.5, 1]$;*

(v) ***I20** quando $x, y \leq z$;*

5.3.1 ϕ-conjugada da G_h-implicação Fuzzy

Proposição 56. *Seja ϕ um automorfismo. A função conjugada G_h^ϕ de G_h dada pela equação*

$$G_h^\phi = \phi^{-1}(G_h(\phi(x), \phi(y))) \tag{5.11}$$

é também uma implicação fuzzy.

Prova. *Considerando uma G_h-implicação fuzzy, cuja definição é dada pela Eq. (5.8).*

I1: *Segundo a Definição 21, tem-se que*

$$\begin{aligned}
G_h^\phi(0, 0) &= \phi^{-1}(G_h(\phi(0), \phi(0))) = \phi^{-1}(G_h(0, 0)) = 1;\\
G_h^\phi(0, 1) &= \phi^{-1}(G_h(\phi(0), \phi(1))) = \phi^{-1}(G_h(0, 1)) = 1;\\
G_h^\phi(1, 1) &= \phi^{-1}(G_h(\phi(1), \phi(1))) = \phi^{-1}(G_h(1, 1)) = 1;\\
G_h^\phi(1, 0) &= \phi^{-1}(G_h(\phi(1), \phi(0))) = \phi^{-1}(G_h(1, 0)) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, a conjugada de uma G_h-implicação fuzzy é também uma implicação fuzzy.

Proposição 57. *(HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006, Proposição 2) A conjugada da função G_h dada pela Eq. (5.11), satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) ***I2**, para todo $x, y, x \in U$;*

(ii) ***I3** se $0.5 \leq y$;*

(iii) ***I5** se $0.5 \leq x, y$;*

(iv) *se $0.5 \leq x, y$ então $G_h(x, y) \geq G_h(N(y), N(x))$;*

(v) *G_h é contínua;*

se, e somente se, a função G_h, dada pela expressão Eq. (8.10) satisfaz estas propriedades.

Proposição 58. *(HATZIMICHAILIDIS; KABURLASOS; B. K. PAPADOPOULOS, 2006, Proposição 3) A função conjugada de G_h, dada pela Eq. (5.11), satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) ***I19** quando $0.5 \leq x \leq y \leq z$;*

(ii) ***I11** quando $x \geq y$;*

(iii) ***I21** quando $S(x, N(x)) \leq y$;*

(iv) ***I22** quando $y \in [0.5, 1]$;*

(v) ***I20** quando $x, y \leq z$;*

se, e somente se, a função G_h, dada pela Eq. (5.8), também satisfaz estas propriedades.

Proposição 59. *Seja $0.5 \leq x \leq y \leq z$, a implicação G_h e sua conjugada são A-implicações.*

Prova. *Decorre das Proposições 44, 54, 55, 57 e 58.*

5.4 Considerações Finais

Neste capítulo apresentou-se uma axiomatização de implicações fuzzy consideradas na literatura como A-implicações, tais implicações não podem ser naturalmente representadas na forma explícita ou na forma implícita. Entre estas implicações, tem-se as implicações de Yager e as subclasses das G_h-Implicações fuzzy. Foi considerado também, a ação de automorfismos sobre a classe de A-implicações, analisando alguns aspectos relacionados com a relação de dualidade, considerando as subclasses de implicações de I_Y e G_h.

6 AGREGADORES E NEGAÇÕES FUZZY INTERVALARES

Neste capítulo considera-se o estudo de operadores de agregação e negação fuzzy intervalares. Define-se as normas triangulares intervalares e suas construções duais (conormas triangulares intervalares), ou simplesmente t-normas intervalares (t-conormas intervalares)e, também, a negação fuzzy intervalar. Automorfismo atuando sobre t-normas e t-conormas intervalares são estudados, mostrando ainda que estes operadores preservam tais funções intervalares, obtidas pela representação canônica intervalar das correspondentes t-normas, t-conormas e negação fuzzy. Várias generalizações de normas triangulares intervalares são encontradas na literatura (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a,b, 2007; DIMURO et al., 2008; MOORE; LODWICK, 2003; ALEFELD; HERZBERGER, 1983; BACZYNSKI; JAYARAN, 2007; DUBOIS; PRADE, 1991; TURKSEN, 1986), e estas referências foram consideradas na organização deste capítulo.

6.1 Normas e Conormas Triangulares Intervalares

Esta seção apresenta a definição de norma e conorma triangular intervalar e considera também os exemplos mais referenciados na literatura, incluindo as classificações referentes à relação de dualidade.

6.1.1 Norma Triangular Intervalar

Seja $\mathbb{U} = \{[a, b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ o conjunto dos intervalos de reais entre 0 e 1. Considerando-se que $X \in \mathbb{U}$ então, a partir da função de projeção, $X = [\underline{X}, \overline{X}]$.

Definição 22. *Uma norma triangular intervalar, conhecida como t-norma intervalar, é uma operação binária* $\mathbb{T} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$*,que satisfaz as seguintes propriedades:*

$\mathbb{T}_1$ *Comutatividade:* $\mathbb{T}(X, Y) = \mathbb{T}(Y, X)$

$\mathbb{T}_2$ *Associatividade:* $\mathbb{T}(X(\mathbb{T}(Y, Z)) = \mathbb{T}(\mathbb{T}(X, Y), Z)$

$\mathbb{T}_3$ *Elemento Neutro:* $\mathbb{T}(X, [1, 1]) = X$

$\mathbb{T}_4$ *Monotonicidade em relação às ordens:*

A) Produto: $\mathbb{T}(X, Y) \leq \mathbb{T}(Z, W)$ *se* $X \leq Z$ *e* $Y \leq W$

B) Inclusão: $\mathbb{T}(X, Y) \subseteq \mathbb{T}(Z, W)$ *se* $X \subseteq Z$ *e* $Y \subseteq W$

Proposição 60. *(TAKAHASH; BEDREGAL, 2006) Se* $T : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *é uma t-norma, então* $\mathbb{T} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *definida por*

$$\mathbb{T}(X, Y) = [T(\underline{X}, \underline{Y}), T(\overline{X}, \overline{Y})] \tag{6.1}$$

é uma t-norma intervalar, denominada de t-norma intervalar derivada de T.

Prova. *Sejam* $X, Y, Z, W \in [0, 1]$. *Tem-se que, se* $\mathbb{T}$ *é uma t-norma intervalar, satisfaz as seguintes propriedades:*
(i) Comutativa:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(X, Y) &= [T(\underline{X}, \underline{Y}), T(\overline{X}, \overline{Y})] \\ &= [T(\underline{Y}, \underline{X}), T(\overline{Y}, \overline{X})] \\ &= \mathbb{T}(Y, X) \end{aligned}$$

(ii) Associativa:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(X, \mathbb{T}(Y, Z)) &= \mathbb{T}(X, [T(\underline{Y}, \underline{z}), T(\overline{Y}, \overline{z})]) \\ &= [T(\underline{X}, T(\underline{Y}, \underline{z})), T(\overline{X}, T(\overline{Y}, \overline{z}))] \\ &= [T(T(\underline{X}, \underline{Y}), \underline{z}), T(T(\overline{X}, \overline{Y}), \overline{z})] \\ &= \mathbb{T}([T(\underline{X}, \underline{Y}), T(\overline{X}, \overline{Y}), Z) \\ &= \mathbb{T}(\mathbb{T}(X, Y), Z) \end{aligned}$$

(iii) Elemento neutro:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(X, [1, 1]) &= [T(\underline{X}, 1), T(\overline{X}, 1)] \\ &= [\underline{X}, \overline{X}] \\ &= X \end{aligned}$$

(iv) Monotônica em relação à ordem:(veja seção 2.3.2)

A)Produto: Se $X \le Z$ *e* $Y \le W$ *então* $\underline{X} \le \underline{Z}, \overline{X} \le \overline{Z}, \underline{Y} \le \underline{w}$ *e* $\overline{Y} \le \overline{w}$
Logo,$T(\underline{X}, \underline{Y}) \le T(\underline{Z}, \underline{w})$ *e* $T(\overline{X}, \overline{Y}) \le T(\overline{Z}, \overline{w})$.
Assim, $[T(\underline{X}, \underline{Y}), T(\overline{X}, \overline{Y})] \le [T(\underline{Z}, \underline{w}), T(\overline{Z}, \overline{w})]$.
Portanto $\mathbb{T}(X, Y) \le \mathbb{T}(Z, W)$.

B) Se $X \subseteq Z$ *e* $Y \subseteq W$ *então* $\underline{Z} \le \underline{X} \le \overline{X} \le \overline{Z}$ *e* $\underline{w} \le \underline{Y} \le \overline{Y} \le \overline{w}$
Por definição, $\mathbb{T}(X, Y) = [T(\underline{X}, \underline{Y}), T(\overline{X}, \overline{Y})]$ *e* $\mathbb{T}(Z, W) = [T(\underline{Z}, \underline{w}), T(\overline{Z}, \overline{w})]$.
Logo, pela monotonicidade de T, tem-se que $T(\underline{Z}, \underline{w}) \le T(\underline{X}, \underline{Y}) \le T(\overline{X}, \overline{Y}) \le T(\overline{Z}, \overline{w})$.
Portanto $\mathbb{T}(X, Y) \subseteq \mathbb{T}(Z, W)$.

Logo, pelo demonstrado acima, $\mathbb{T}$ *é uma t-norma intervalar.*

6.1.2 Conorma Triangular Intervalar

Definição 23. *Uma conorma triangular intervalar, conhecida como t-conorma intervalar, é uma operação binária* $\mathbb{S} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$*,que satisfaz as seguintes propriedades:*

$\mathbb{S}_1$ *Comutatividade:* $\mathbb{S}(X, Y) = \mathbb{S}(Y, X)$

$\mathbb{S}_2$ *Associatividade:* $\mathbb{S}(X((Y, Z)) = \mathbb{S}(X, Y), Z)$

$\mathbb{S}_3$ *Elemento Neutro:* $\mathbb{S}(X, [0, 0]) = X$

$\mathbb{S}_4$ *Monotonicidade em relação à ordem:*

A)Produto: $\mathbb{S}(X, Y) \leq \mathbb{S}(Z, W)$ *se* $X \leq Z$ *e* $Y \leq W$

B)Inclusão: $\mathbb{S}(X, Y) \subseteq \mathbb{S}(Z, W)$ *se* $X \subseteq Z$ *e* $Y \subseteq W$

Proposição 61. *(TAKAHASH; BEDREGAL, 2006) Se* $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ *é uma t-conorma, então* $\mathbb{S} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ *definida por*

$$\mathbb{S}(X, Y) = [S(\underline{X}, \underline{Y}), S(\overline{X}, \overline{Y})] \tag{6.2}$$

é uma t-conorma intervalar, denominada de t-conorma intervalar derivada de S.

Proposição 62. *(BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a)Seja* $\mathbb{T}$ *uma t-norma intervalar. Então* $\mathbb{S} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ *definida por*

$$\mathbb{S}(X, Y) = [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y)$$

é uma t-conorma intervalar, denominada de t-conorma intervalar derivada de $\mathbb{T}$*.*

Prova. *Sejam* $X, Y, ZouW \in \mathbb{U}$*. Tem-se que, se* $\mathbb{S}$ *é uma t-conorma intervalar, satisfaz as seguintes propriedades:*
(i) Comutativa:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(X, Y) &= [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y) \\ &= [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - Y, [1, 1] - X) = \mathbb{S}(Y, X) \end{aligned}$$

(ii) Associativa:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(X, \mathbb{S}(Y, Z)) &= \mathbb{S}(X, [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - Y, [1, 1] - Z)) \\ &= [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - ([1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - Y, [1, 1] - Z))) \\ &= [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, \mathbb{T}([1, 1] - Y, [1, 1] - Z)) \\ &= [1, 1] - \mathbb{T}(\mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y), [1, 1] - Z) \\ &= [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - ([1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y)), [1, 1] - Z) \\ &= \mathbb{S}([1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y), Z) \\ &= \mathbb{S}(\mathbb{S}(X, Y), Z) \end{aligned}$$

(iii) Elemento neutro:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(X, [0, 0]) &= [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - [0, 0]) \\ &= [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1]) \\ &= [1, 1] - ([1, 1] - X) = X \end{aligned}$$

Tabela 6.1: Exemplos básicos de t-normas intervalares

Designação	Representação
$\mathbb{T}_M$:t-norma do Mínimo	$\mathbb{T}_M(X, Y) = min(X, Y)$
$\mathbb{T}_P$:t-norma Produto	$\mathbb{T}_P(X, Y) = X \cdot Y$
$\mathbb{T}_L$: t-norma de Lukasiewicz	$\mathbb{T}_L(X, Y) = max(X + Y - [1, 1], [0, 0])$

Tabela 6.2: Exemplos básicos de t-conormas intervalares

Designação	Representação
$\mathbb{S}_M$: t-conorma do Máximo	$\mathbb{S}_M(X, Y) = max(X, Y)$
$\mathbb{S}_P$:t-conorma Soma Produto	$\mathbb{S}_P(X, Y) = X + Y - X \cdot Y$
$\mathbb{S}_L$:t-conorma de Lukasiewicz	$\mathbb{S}_L(X, Y) = min(X + Y, [1, 1])$

(iv) Monotônica:

A) Se $X \leq Z$ e $Y \leq W$ então $[1, 1] - X \leq [1, 1] - Z$ *e* , $[1, 1] - Y \leq [1, 1] - W$.
Logo,pela monotonicidade de $\mathbb{T}$,$\mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y) \leq \mathbb{T}([1, 1] - Z, [1, 1] - W)$.
Assim, $[1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y) \leq [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - Z, [1, 1] - W)$.
Portanto, $\mathbb{S}(X, Y) \leq \mathbb{S}(Z, W)$.

B) Se $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq W$ então $[1, 1] - X \subseteq [1, 1] - Z$ *e* $[1, 1] - Y \subseteq [1, 1] - W$
Pela monotonicidade de $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y) \subseteq \mathbb{T}([1, 1] - Z, [1, 1] - W)$.
Logo, $[1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - X, [1, 1] - Y) \subseteq [1, 1] - \mathbb{T}([1, 1] - Z, [1, 1] - W)$.
Portanto, $\mathbb{S}(X, Y) \subseteq \mathbb{S}(Z, W)$.

Logo, pelo demonstrado acima, $\mathbb{S}$ é uma t-conorma intervalar.

6.1.3 Exemplos de t-normas e t-conormas intervalares

Nas tabelas 6.1 e 6.2 apresenta-se exemplos básicos das extensões intervalares das funções triangulares t-normas(T) e t-conormas(S):T_M, T_P,T_L,T_D,S_M, S_P,S_L,S_D apresentadas nas seções 3.1.1 e3.1.2.

Proposição 63. *Sejam $\mathbb{T}$ uma t-norma intervalar e $\mathbb{S}$ uma t-conorma intervalar, então:*

$$\mathbb{T}([0, 0], X) = \mathbb{T}(X, [0, 0]) = [0, 0]; \tag{6.3}$$

$$\mathbb{S}([1, 1], X) = \mathbb{S}(X, [1, 1]) = [1, 1]. \tag{6.4}$$

Prova.

$$\mathbb{T}([0, 0], X) \leq \mathbb{T}([0, 0], [1, 1]) = [0, 0] \Rightarrow \mathbb{T}([0, 0], X) = [0, 0]$$

$$\mathbb{S}([1, 1], X) \geq \mathbb{S}([1, 1], [0, 0]) = [1, 1] \Rightarrow \mathbb{S}([1, 1], X) = [1, 1]$$

6.2 Negação Fuzzy Intervalar

Definição 24. *Uma função intervalar $\mathbb{N} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é uma **negação fuzzy intervalar** se, para todo $X, Y \in \mathbb{U}$, as seguintes condições são satisfeitas:*

$\mathbb{N}1$: $\mathbb{N}([0,0]) = [1,1]$ *e* $\mathbb{N}([1,1]) = [0,0]$;

$\mathbb{N}2a$: *Se* $X \geq Y$ *então* $\mathbb{N}(X) \leq \mathbb{N}(Y)$; *e* $\mathbb{N}2b$: *Se* $X \subseteq Y$ *então* $\mathbb{N}(X) \supseteq \mathbb{N}(Y)$.

*Se $\mathbb{N}$ também satisfaz a propriedade involutiva, $\mathbb{N}$ é uma **negação fuzzy intervalar forte**:*

$\mathbb{N}3$: $\mathbb{N}(\mathbb{N}(X)) = X$.

Teorema 2. *(BEDREGAL et al., 2007c) Seja $N : U \to U$ uma negação fuzzy. Então $\widehat{N}$ é negação fuzzy intervalar. Além disso, se N é uma negação fuzzy forte então $\widehat{N}$ é também uma negação fuzzy intervalar forte. Uma caracterização de $\widehat{N}$ é dada pela expressão:*

$$\widehat{N}(X) = [N(\overline{X}), N(\underline{X})]. \tag{6.5}$$

6.3 Relação de Dualidade entre $\mathbb{T}$-norma e $\mathbb{T}$-conorma Intervalares

Definição 25. *Seja N uma negação fuzzy. A função $\mathbb{S} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ ($\mathbb{T} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$) é uma t-conorma (t-norma) intervalar se, e somente se, existe a t-norma (t-conorma) intervalar $\mathbb{T}$ ($\mathbb{S}$)tal que, para todo $(x, y) \in \mathbb{U}^2$, cada uma das seguintes equivalências são satisfeitas:*

$$\mathbb{S}(X, Y) = \mathbb{N}(\mathbb{T}(\mathbb{N}(X), \mathbb{N}(Y)), \tag{6.6}$$

$$\mathbb{T}(X, Y) = \mathbb{N}(\mathbb{S}(\mathbb{N}(X), \mathbb{N}(Y)). \tag{6.7}$$

Se N é forte, a t-conorma intervalar dada pela Eq.(6.6) é chamada de t-conorma intervalar dual de $\mathbb{T}$ e, analogamente, a t-norma intervalar dada pela Eq.(6.7) diz-se a t-norma intervalar dual de $\mathbb{S}$.

Proposição 64. *(BEDREGAL, 2009; BEDREGAL; TAKAHASHI, 2007) Seja a negação padrão, $N_C(x) = 1 - x$. $(\mathbb{T}_M, \mathbb{S}_M)$, $(\mathbb{T}_P, \mathbb{S}_P)$, $(\mathbb{T}_L, \mathbb{S}_L)$ e $(\mathbb{T}_D, \mathbb{S}_D)$ são pares de funções duais em relação a N_C.*

Prova. *(i)* $(\mathbb{T}_M, \mathbb{S}_M)$ *é par dual:*

$$\begin{aligned}
[1,1] - \mathbb{T}_M([1,1] - X, [1,1] - Y) &= [1,1] - \min([1,1] - X, [1,1] - Y) \\
&= \max([1,1] - ([1,1] - X), [1,1] - ([1,1] - Y)) \\
&= \max(X, Y) = \mathbb{S}_M(X, Y)
\end{aligned}$$

(ii) $(\mathbb{S}_P, \mathbb{S}_P)$ *é par dual:*

$$\begin{aligned}
[1,1] - \mathbb{T}_P([1,1] - X, [1,1] - Y) &= [1,1] - ([1,1] - X).([1,1] - Y) \\
&= [1,1] - ([1,1] - X - Y + XY) \\
&= [1,1] - [1,1] + X + Y - XY = \mathbb{S}_P(X, Y)
\end{aligned}$$

(iii) $(\mathbb{T}_L, \mathbb{S}_L)$ *é par dual:*

$$\begin{aligned}
[1,1] - S_L([1,1]-X,[1,1]-Y) &= [1,1] - \min(([1,1]-X)+([1,1]-Y)- \\
&\quad ([1,1]-[1,1]),([1,1]-[0,0])) \\
&= \max([1,1]-([1,1]-X)+[1,1]-([1,1]-Y) \\
&\quad -[1,1]-([1,1]-[1,1]),[1,1]-([1,1]-[0,0])) \\
&= \max(X+Y-[1,1],[0,0]) = \mathbb{T}_L(X,Y)
\end{aligned}$$

(iv) $(\mathbb{T}_D, \mathbb{S}_D)$ *é par dual:*

$$\begin{aligned}
a)\mathbb{T}_D(X,Y) &= [0,0], \quad (X,Y) \in [0,1[^2 \\
&= [1,1]-[0,0] = [1,1] = \mathbb{S}_D(X,Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\mathbb{T}_D(X,Y) &= \min([1,1]-X,[1,1]-Y) \\
&= \max([1,1]-([1,1]-X),[1,1]-([1,1]-Y)) \\
&= \max([1,1]-[1,1]+X,[1,1]-[1,1]+Y) \\
&= \max(X,Y) = \mathbb{S}_D(X,Y)
\end{aligned}$$

6.4 Automorfismo Intervalar

Nesta seção, o conceito de automorfismo intervalar é considerado, estendendo a definição de automorfismo apresentada na Definição 14 do Capítulo 3 , com base na CIR, considerada na Definição 8 do Capítulo 2.4. As propriedades relacionadas aos automorfismos intervalares também são estudadas, a fim de analisar os efeitos da ação de um automorfismo intervalar sobre a negação intervalar, as t-normas e t-conormas intervalares.

6.4.1 Construção Canônica de um Automorfismo Intervalar

A função $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é um **automorfismo intervalar** se e somente se é bijetiva e monotônica pela relação de ordem produto se $X \leq Y$ então $\Phi(X) \leq \Phi(Y)$. O conjunto de todos os automorfismos intervalares $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é denotado por $Aut(\mathbb{U})$.

Teorema 3. *(REISER et al., 2008) Se* $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *é um automorfismo intervalar. Então existe um automorfismo* $\phi : U \to U$ *tal que*

$$\Phi(X) = [\phi(\underline{X}), \phi(\overline{X})]. \tag{6.8}$$

6.4.2 Melhor representação de um Automorfismo Intervalar

Em seguida, são analisados automorfismos intervalares a partir da representação de automorfismos.

Teorema 4. ***Representação Canônica de um Automorfismo*** (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a, Theorem 5.2) *Seja* $\phi : U \to U$ *um automorfismo. Então* $\widehat{\phi}$ *é um automorfismo intervalar determinado por:*

$$\widehat{\phi}(X) = [\phi(\underline{X}), \phi(\overline{X})]. \tag{6.9}$$

Portanto, automorfismos intervalares são as melhores representações intervalares de automorfismos clássicos.

Corolário 5. *Seja l a função projeção definida na Eq.(2.5). $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é um automorfismo intervalar se, e somente se, $\Phi = \widehat{\underline{\Phi}}$, onde $\underline{\Phi} : U \to U$ é definido como* $\underline{\Phi}(x) = l(\Phi([x, x]))$.

Prova. *Ver Teorema 3 e Teorema 4.*

Observa-se que nas t-conormas , por definição, a inclusão monotônica é obrigatória. No entanto, essa propriedade não é necessária, por definição, para automorfismos intervalar. A seguir, mostra-se que também são automorfismos intervalares a inclusão monotônica (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a).

Corolário 6. (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a, Corollary 5.1) *Se Φ é um automorfismo intervalar então Φ é inclusão monotônica, isto é, se $X \subseteq Y$ então $\Phi(X) \subseteq \Phi(Y)$.*

Considerando a definição de alternativas de automorfismo introduzido em (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003), podemos oferecer alternativas caracterizações de automorfismos intervalar com base nas noções de continuidade Moore e Scott.

Proposição 65. (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a, Proposition 5.1) $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *é um automorfismo intervalar se, e somente se, Φ é Moore-contínua, e estritamente crescente,* $\Phi([0, 0]) = [0, 0]$ *e* $\Phi([1, 1]) = [1, 1]$.

Corolário 7. (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006a, Corollary 5.2) *Seja* $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *uma função Moore-continua e estritamente crescente tal que* $\Phi([0, 0]) = [0, 0]$ *e* $\Phi([1, 1]) = [1, 1]$. *Então exite um automorfismo ϕ tal que $\Phi = \widehat{\phi}$.*

O caso da continuidade de Scott é análogo.

Proposição 66. *Seja ϕ um automorfismo. Então, afirma-se que $\widehat{\phi^{-1}} = \widehat{\phi}^{-1}$.*

Prova. *Logo:*

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(\widehat{\phi^{-1}}(X)) &= \widehat{\phi}([\phi^{-1}(\underline{X}), \phi^{-1}(\overline{X})]) && \textit{pela Eq. (6.9)} \\
&= [\phi(\phi^{-1}(\underline{X})), \phi(\phi^{-1}(\overline{X}))]) && \textit{pela Eq. (6.9)} \\
&= X
\end{aligned}$$

Então, $\widehat{\phi^{-1}}$ é o inverso de $\widehat{\phi}$, dado por, $\widehat{\phi^{-1}} = \widehat{\phi}^{-1}$.

6.4.3 Automorfismos Intervalares agindo sobre Negações Fuzzy Intervalares e t-normas (t-conormas) Intervalares

Analogamente ao caso pontual um automorfismo intervalar Φ atua em uma função fuzzy valorada intervalarmente. $F : \mathbb{U}^n \to \mathbb{U}$, da seguinte forma:

$$F^{\Phi}(X_1, \ldots, X_n) = \Phi^{-1}(F(\Phi(X_1), \ldots, \Phi(X_n))). \tag{6.10}$$

Teorema 5. *(BEDREGAL, 2010) Seja* $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *um automorfismo intervalar e* $\mathbb{N} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *uma negação fuzzy intervalar. Então, a função* $\mathbb{N}^{\Phi} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$*, definida por*

$$\mathbb{N}^{\Phi}(X) = \Phi^{-1}(\mathbb{N}(\Phi(X))), \tag{6.11}$$

é uma negação fuzzy intervalar.

Proposição 67. *(TAKAHASH; BEDREGAL, 2006) Se* $\mathbb{N}$ *é um negação fuzzy intervalar forte e* Φ *um automorfismo intevalar. Então* $\mathbb{N}^{\Phi}$ *é também uma negação fuzzy intervalar forte.*

Teorema 6. *Sejam* $\mathbb{T}$*,* $\mathbb{S}$ *e* $\mathbb{N}$ *uma t-norma intervalar, uma t-conorma intervalar e uma negação fuzzy intervalar forte, respectivamente. Se* Φ *é um automorfismo intervalar, então*

$$(\mathbb{S}_{\mathbb{N}})^{\Phi}(X,Y) = \mathbb{S}^{\Phi}_{\mathbb{N}^{\Phi}}(X,Y) \tag{6.12}$$

$$(\mathbb{T}_{\mathbb{N}})^{\Phi}(X,Y) = \mathbb{T}^{\Phi}_{\mathbb{N}^{\Phi}}(X,Y) \tag{6.13}$$

Prova. *Apresenta-se a seguir a prova da Eq. 6.12. A construção da prova para Eq. 6.13 é análoga.*

Se $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}(X,Y) = N(S(N(X),N(Y)))$ *então tem-se que:*

$$\begin{aligned}
(\mathbb{S}_{\mathbb{N}})^{\Phi}(X,Y) &= \Phi^{1}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}(\Phi(X),\Phi(Y))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{N}(\mathbb{S}(\mathbb{N}(\Phi(X)),\mathbb{N}(\Phi(Y))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{N}(\Phi\circ\Phi^{-1}\mathbb{S}(\Phi\circ\Phi^{-1}\mathbb{N}(\Phi(X)),\Phi\circ\Phi^{-1}\mathbb{N}(\Phi(Y))))) \\
&= \mathbb{N}^{\Phi}(\mathbb{S}^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X),\mathbb{N}^{\Phi}(Y))) \\
&= \mathbb{S}^{\Phi}_{\mathbb{N}^{\Phi}}(X,Y)
\end{aligned}$$

Teorema 7. (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2007, Proposition 7.1) *Seja* $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *um automorfismo intervalar e* $\mathbb{S} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *uma t-conorma intervalar. Então a função* $\mathbb{S}^{\Phi} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$*, definida por*

$$\mathbb{S}^{\Phi}(X,Y) = \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\Phi(X),\Phi(Y))), \tag{6.14}$$

$$\mathbb{T}^{\Phi}(X,Y) = \Phi^{-1}(\mathbb{T}(\Phi(X),\Phi(Y))) \tag{6.15}$$

é uma t-conorma intervalar (t-norma intervalar).

Proposição 68. *Seja* N *uma negação fuzzy,* S *uma t-conorma e* ϕ *um automorfismo. Então, afirma-se que*

(i) $\widehat{\widehat{N}^{\phi}} = \widehat{N^{\phi}}$;

(ii) $\widehat{\widehat{S}^{\phi}} = \widehat{S^{\phi}}$ *e*

(iii) $\widehat{\widehat{T}^{\phi}} = \widehat{T^{\phi}}$.

Prova. *Prova do ítem (***i***) Logo:*

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{N}^{\phi}}(X) &= \widehat{\phi}^{-1}(\widehat{N}(\widehat{\phi}(X))) && \textit{pela Eq. (6.11)} \\
&= \widehat{\phi^{-1}}(\widehat{N}(\widehat{\phi}(X))) && \textit{pela Prop. 66} \\
&= [\phi^{-1}(N(\phi(\overline{X}))),\phi^{-1}(\phi(N(\underline{X})))] && \textit{pela Eq. (2.7)} \\
&= [N^{\phi}(\overline{X}),N^{\phi}(\underline{X})] \\
&= \widehat{N^{\phi}}(X) && \textit{por (6.5)}
\end{aligned}$$

*A prova dos ítens (**ii**) e (**iii**) são análogas.*

6.5 Considerações Finais

Este capítulo abordou a definição de norma e conorma triangular intervalar e considerou a análise com respeito à relação de dualidade. O conceito de automorfismo intervalar é considerado, com base na definição clássica de um automorfismo e, também, foi analisado os efeitos da ação de um automorfismo intervalar sobre a negação intervalar e as funções de agregação intervalares. O próximo capítulo apresenta um estudo das implicações fuzzy valoradas intervalares.

7 IMPLICAÇÃO FUZZY INTERVALAR

Neste capítulo considera-se o estudo das implicações fuzzy valoradas intervalarmente, suas propriedades e mais precisamente, caracterizações de algumas classes de implicações fuzzy intervalares. Esta discussão concentra-se, principalmente, na extensão e análise de propriedades algébricas das quatro importantes classes de implicações fuzzy: S-implicações intervalares, R-implicações intervalares, QL-implicações intervalares e D-implicações intervalares, cujas abordagens para lógica fuzzy tipo-1 já foram apresentadas nos capítulos anteriores.

7.1 Definição e Propriedades das Implicações Fuzzy Valoradas Intervalarmente

A Definição 26 estende a Definição 17 apresentada no Capítulo 4, apresentando a extensão intervalar para as principais propriedades de implicações fuzzy.

Definição 26. *Uma função intervalar* $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *é uma* implicação fuzzy intervalar *se as seguintes condições de contorno são satisfeitas(BEDREGAL et al., 2007a):*

$\mathbb{I}$1 $\mathbb{I}([1,1],[1,1]) = \mathbb{I}([0,0],[0,0]) = \mathbb{I}([0,0],[1,1]) = [1,1], \quad \mathbb{I}([1,1],[0,0]) = [0,0]$.

A seguir, tem-se extensão intervalar das propriedades das implicações fuzzy consideradas na seção 4.1.

$\mathbb{I}$2 *Se* $X \leq Z$ *então* $\mathbb{I}(X,Y) \geq \mathbb{I}(Z,Y)$ *(antitonicidade no primeiro argumento);*

$\mathbb{I}$3 *Se* $Y \leq Z$ *então* $\mathbb{I}(X,Y) \leq \mathbb{I}(X,Z)$ *(isotonicidade no segundo argumento);*

$\mathbb{I}$4 $\mathbb{I}([1,1],Y) = Y$ *(princípio da neutralidade);*

$\mathbb{I}$5 $\mathbb{I}(X,\mathbb{I}(Y,Z)) = \mathbb{I}(Y,\mathbb{I}(X,Z))$ *(princípio da troca);*

$\mathbb{I}$6 $\mathbb{I}(X,Y) = \mathbb{I}(X,\mathbb{I}(X,Y))$*;*

$\mathbb{I}$7 $\mathbb{I}(X,N(X)) = N(X)$*;*

$\mathbb{I}$8 $\mathbb{I}(X,[0,0]) = N(X)$*;*

$\mathbb{I}$9 $\mathbb{I}(X,[1,1]) = [1,1]$*(dominância da verdade do consequente);*

$\mathbb{I}$10 $\mathbb{I}(X,Y) \geq Y$*;*

$\mathbb{I}$**11** $\mathbb{I}(X, Y) = \mathbb{I}(N(Y), N(X))$ *(simetria contrapositiva);*

$\mathbb{I}$**12** $\mathbb{I}([0, 0], Y) = [1, 1]$ *(dominância da falsidade do antecedente);*

$\mathbb{I}$**13** $\mathbb{I}(X, Y) \geq N_I(X)$*;*

$\mathbb{I}$**14** $\mathbb{I}(X, Y) = [0, 0]$*, se, e somente se,* $X = [1, 1]$ *e* $Y = [0, 0]$*;*

$\mathbb{I}$**15** $\mathbb{S}(X, N(X)) = [1, 1]$ *(lei do terceiro excluído);*

$\mathbb{I}$**16** $\mathbb{I}(X, Y) = [0, 0]$ *se* $X > Y$ *(princípio da ordenação);*

$\mathbb{I}$**17** $\mathbb{I}(X, X) = [1, 1]$ *(princípio da identidade);*

$\mathbb{I}$**18** $\mathbb{I}(X, Y) = [1, 1]$*, se , e somente se,* $X \leq Y$ *(condição de contorno).*

Teorema 8. *(BEDREGAL et al., 2007a) Seja* $I : U^2 \rightarrow U$ *uma implicação fuzzy tal que* $I(x, y) = 1$ *se* $x \leq y$ *e satisfazendo as propriedades* ***I2****,* ***I3*** *e* ***I18****. Então a representação intervalar de I,* $\widehat{I} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ *é dado pela Eq. (7.1)*

$$\widehat{I}(X, Y) = [I(\overline{X}, \underline{Y}), I(\underline{X}, \overline{Y})] \tag{7.1}$$

Proposição 69. *Seja I uma implicação fuzzy que satisfaz* **I1** *e* **I2***. I satisfaz a Propriedade* **IK***, para todo* $\mathbf{k} = 1, \ldots, 12$ *se, e somente se,* $\widehat{I}$ *satisfaz a Propriedade* $\mathbb{I}\mathbf{k}$*.*

Prova. *Para* $\mathbf{k} = 1 - 7$ *e* $\mathbf{k} = 9$*, ver a prova em (BEDREGAL et al., 2010, Corolário 22) (BEDREGAL et al., 2007c, Teorema 6.1). Quando*$\mathbf{k} = 11$ *e* $\mathbf{k} = 12$*, a prova é apresentada em (BEDREGAL et al., 2007c, Proposição 6.5) e (BEDREGAL et al., 2007c, Proposição 6.3), respectivamente.*

I8 $\Rightarrow$ *Se* $u \in \widehat{I}(X, \widehat{T}(Y, Z))$ *então existe* $x \in X$ *e* $v \in \widehat{T}(Y, Z)$ *com* $u = I(x, v)$*. Mas, se* $v \in \widehat{T}(Y, Z)$*, então existe* $y \in Y$ *e* $z \in Z$ *tal que* $v = T(y, z)$*. Assim,* $u = I(x, T(y, z))$ *e, por conseguinte, a propriedade* ***I****8,* $u = T(I(x, y), I(x, z))$*. E, portanto* $I(x, y) \in \widehat{I}(X, Y)$ *e* $I(x, z) \in \widehat{I}(X, Z)$*,* $u \in \widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(X, Z))$*. Por isso,* $\widehat{I}(X, \widehat{T}(Y, Z)) \subseteq \widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(X, Z))$*.*

$\Leftarrow$ *por outro lado, se* $u \in \widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(X, Z))$ *então existe* $w \in \widehat{I}(X, Y)$ *e*$v \in \widehat{I}(X, Z)$ *tal que* $u = T(w, v)$*. Mas, se* $w \in \widehat{I}(X, Y)$ *então existe* $x \in X$ *e* $y \in Y$ *tal que* $w = I(x, y)$*. Além disso, se* $v \in \widehat{I}(X, Z)$ *então existe* $x \in Z$ *e* $z \in Z$ *tal que* $v = I(x, z)$*. Assim,* $u = T(I(x, y), I(x, z))$ *e portanto pela Propriedade* ***I****8,* $u = I(x, T(y, z))$*. Assim, porque* $x \in X$ *e* $T(y, z) \in \widehat{T}(Y, Z)$*,* $u \in \widehat{I}(X, \widehat{T}(Y, Z))$*. Portanto,* $\widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(X, Z)) = \widehat{I}(X, \widehat{T}(Y, Z))$*.*

I10 $\Rightarrow$ *Se* $u \in \widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(N(X), Y))$ *então existe* $w \in \widehat{I}(X, Y)$ *e*$v \in \widehat{I}(N(X), Y)$ *tal que* $u = T(w, v)$*. Mas, se* $w \in \widehat{I}(X, Y)$ *então existe* $x \in X$ *e* $y \in Y$ *tal que* $w = I(x, y)$*. Além disso, se* $v \in \widehat{I}(N(X), Y)$ *então existe* $N(x) \in N(X)$ *e* $y \in Y$ *tal que* $v = I(N(x), y)$*. Se,* $u = T(I(x, y), I(N(x), y))$ *e, portanto , pela propriedade* ***I****10,* $u = y$*. Assim, por conseguinte* $y \in Y$*,* $u \in Y$*. Portanto,* $\widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(N(X), Y)) \subseteq Y$*.*

$\Leftarrow$ *Quando* $y \in Y$*, pela propriedade* ***I****8,* $T(I(x, y), I(N(x), y)) \in Y$*. Sendo* $x \in X$*,* $y \in Y$ *e* $z \in Z$*,* $I(x, y) \in \widehat{I}(X, Y)$ *e* $I(x, z) \in \widehat{I}(X, Z)$*. Se,* $y = T(I(x, y), I(N(x), y)) \in \widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(X, Z))$*, logo* $Y \subseteq \widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(X, Z))$*. Portanto, pode-se concluir que* $\widehat{T}(\widehat{I}(X, Y), \widehat{I}(X, Z)) = Y$*.*

7.2 Principais Classes de Implicações Fuzzy Valoradas Intervalarmente

Primeiramente esta seção apresenta as principais caracterizações e propriedades das S-implicações intervalares.Segue-se o estudo das QL-implicações intervalares, D-implicações intervalares e R-implicações intervalares. São incluídos exemplos e uma análise baseada em diagramas e nas equações que viabilizam a extensão das classes de implicações fuzzy para suas correspondentes versões intervalares.

7.2.1 S-Implicações Intervalares

Se S uma t-conorma e N uma negação fuzzy, então uma S-implicação fuzzy é dada pela Eq.(4.2) $I_{S,N}(x, y) = S(N(x), y)$

Condidere agora que, $\mathbb{S}$ é uma t-conorma intervalar e $\mathbb{N}$ é uma negação intervalar. Uma implicação intervalar $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}$ é uma **S-implicação intervalar** se satisfaz a Eq. (7.2)

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}(X, Y) = \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), Y). \tag{7.2}$$

Proposição 70. *(REISER et al., 2008) Se I é um S-implicação então $\widehat{I}$ é uma S-implicação intervalar.*

Quando uma negação fuzzy intervalar é forte (estrita), a S-implicação fuzzy intervalar relacionada é chamada de S-implicação intervalar forte.

A proposição seguinte fornece uma caracterização para a melhor representação de uma S-implicação intervalar e prova que esta implicação fuzzy intervalar é uma S-implicação intervalar.

Proposição 71. *(BEDREGAL et al., 2010, Proposição 21) Seja S é uma t-conorma e N uma negação fuzzy. Então, tem-se que*

$$\mathbb{I}_{\widehat{S},\widehat{N}} = \widehat{I_{S,N}}.$$

Prova. *Considerando $X, Y \in \mathbb{U}$. Segue-se que:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{\widehat{S},\widehat{N}}(X, Y) &= \widehat{S}(\widehat{N}(X), Y)\\
&= \widehat{S}([N(\overline{X}), N(\underline{X})], Y)\\
&= [S(N(\overline{X}), \underline{Y}), S(N(\underline{X}), \overline{Y})]\\
&= [I_{S,N}(\overline{X}, \underline{Y}), I_{S,N}(\underline{X}, \overline{Y})]\\
&= \widehat{I_{S,N}}(X, Y).
\end{aligned}$$

O próximo corolário decorre diretamente da Proposição 71.

Corolário 8. *(REISER et al., 2008) Se I é uma S-implicação então $\widehat{I}$ é uma S-implicação intervalar.*

Sejam as seguintes classes e correspondentes denotações:

- $C(N)$ e $C(\mathbb{N})$ para as classes das negações fuzzy e negações fuzzy intervalares;
- $C(S)$ e $C(\mathbb{S})$ para as classes das t-conormas fuzzy e t-conormas fuzzy intervalares;

- $C(S, N)$ e $C(\mathbb{S}, \mathbb{N})$ para as classes das S-implicações fuzzy e S-implicações fuzzy intervalares.

A partir do teorema 8 e das Proposições 71 e 70 verifica-se a comutatividade da Classe das S-implicações intervalares.

$$\begin{tikzcd}
C(S) \times C(N) \arrow[r, "Eq.(4.2)"] \arrow[d, "{Eq.(6.5), Eq.(6.2)}"'] & C(S, N) \arrow[d, "Eq.(7.1)"] \\
C(\mathbb{S}) \times C(\mathbb{N}) \arrow[r, "Eq.(7.2)"] & C(\mathbb{S}, \mathbb{N})
\end{tikzcd}$$

Figura 7.1: Comutatividade da classe das S-implicações Intervalares

A proposição seguinte mostra que as S-implicações intervalares são representáveis por S-implicações fuzzy.

Teorema 9. $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *é uma (forte, estrita) S-implicação (forte, estrita) intervalar se, e somente se, existem* I_1 *e* I_2 *S-implicações (fortes, estritas) de tal forma que* $I_1 \leq I_2$ *e,* $\forall\, X, Y \in \mathbb{U}$*, se verifica*

$$\mathbb{I}(X, Y) = [I_1(\overline{X}, \underline{Y}), I_2(\underline{X}, \overline{Y})].$$

Prova. *(⇒)Seja* $\mathbb{S}$ *e* $\mathbb{N}$ *uma t-conorma intervalar e uma negação fuzzy intervalar* $\mathbb{I}$*, respectivamente. Assim, conclui-se que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(X, Y) &= \mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}(X, Y) \\
&= \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), Y) \\
&= \mathbb{S}([\underline{\mathbb{N}}(\overline{X}), \overline{\mathbb{N}}(\underline{X})], Y) \\
&= [\underline{\mathbb{S}}(\underline{\mathbb{N}}(\overline{X}), \underline{Y}), \overline{\mathbb{S}}(\overline{\mathbb{N}}(\underline{X}), \overline{Y})] \\
&= [I_{\underline{\mathbb{S}},\underline{\mathbb{N}}}(\overline{X}, \underline{Y}), I_{\overline{\mathbb{S}},\overline{\mathbb{N}}}(\underline{X}, \overline{Y})] \\
&= [I_1(\overline{X}, \underline{Y}), I_2(\underline{X}, \overline{Y})].
\end{aligned}$$

(⇐) A prova inversa segue a estrutura de inversão da prova acima.

Proposição 72. *(BEDREGAL et al., 2010, Teorema 29) Uma implicação fuzzy intervalar* $\mathbb{I}$ *é uma S-implicação intervalar se, e somente se,* $\mathbb{I}$ *satisfaz as propriedades* $\mathbb{I}\mathbf{2} - \mathbb{I}\mathbf{5}$ *e* $\mathbb{I}\mathbf{11}$.

7.2.2 QL-Implicações Intervalares

Seja $\mathbb{S}$ uma t-conorma intervalar, $\mathbb{T}$ uma t-norma intervalar e $\mathbb{N}$ uma negação forte intervalar. Então, uma implicação intervalar é uma **QL-implicação intervalar** dada pela equação:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) = \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X, Y)) \;,\; \forall\, X, Y \in \mathbb{U} \tag{7.3}$$

Proposição 73. *Seja S uma t-conorma, N uma negação fuzzy e T uma t-norma. Se S, T e N são contínuas então*

$$\mathbb{I}_{\widehat{S},\widehat{N},\widehat{T}} = \widehat{I_{S,N,T}} \tag{7.4}$$

Prova. *Considerando $X, Y \in \mathbb{U}$, tem-se que*

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\widehat{S},\widehat{N},\widehat{T}}(X,Y) &= \widehat{S}(\widehat{N}(X), \widehat{T}(X,Y))\\ &= \widehat{S}([N(\overline{X}), N(\underline{X})], [T(\underline{X},\underline{Y}), T(\overline{X},\overline{Y}))\\ &= [S(N(\overline{X}), T(\underline{X},\underline{Y})), S(N(\underline{X}), T(\overline{X},\overline{Y}))]\end{aligned}$$

Se $\forall\ x \in X$ e $y \in Y$,

$$S(N(\overline{X}), T(\underline{X},\underline{Y})) \leq S(N(x), \mathbb{T}(X,Y)) \leq S(N(\underline{X}), T(\overline{X},\overline{Y})),$$

então, $\widehat{I_{S,N,T}}(X,Y) \subseteq \mathbb{I}_{\widehat{S},\widehat{N},\widehat{T}}(X,Y)$.

Mas, se $z \in \widehat{S}(\widehat{N}(X), \widehat{T}(X,Y))$, então, pela continuidade de N, existem $z_1 \in \widehat{N}(X)$ e $z_2 \in \widehat{T}(X,Y)$ de tal forma que $S(z_1,z_2) = z$. Assim, pela continuidade de N e T, e pela inclusão monotônica, existem $z_{1a} \in X$, $z_{2a} \in X$ e $z_{2b} \in Y$ tal que $N(z_{1a}) = z_1$ e $T(z_{2a}, z_{2b}) = z_2$ e, assim, $S(N(z_{1a}), T(z_{2a}, z_{2b})) = z$. Se $z_{1a} \leq z_{2a}$,então tem-se $S(N(z_{1a}), T(z_{1a}, z_{2b})) \leq z$, ou se $z_{2a} \leq z_{1a}$, então $S(N(z_{2a}), T(z_{2a}, z_{2b})) \geq z$. Logo, $z \in [I_{S,N,T}(z_{1a}, z_{2b}), I_{S,N,T}(z_{2a}, z_{2b})] \subseteq \{I_{S,N,T}(x,y) : x \in X\ e y \in Y\} \subseteq \widehat{I_{S,N,T}}(X,Y)$. Portanto, $\mathbb{I}_{\widehat{S},\widehat{N},\widehat{T}}(X,Y) = \widehat{S}(\widehat{N}(X), \widehat{T}(X,Y)) \subseteq \widehat{I_{S,N,T}}(X,Y)$.

Corolário 9. *(REISER et al., 2007, Corolário 32) Se I é uma QL-Implicação então $\widehat{I}$ é uma QL-implicação intervalar.*

Exemplo 7. *A melhor representação de QL-implicações intervalar é dada nos Exemplos (REISER et al., 2010) seguintes. Denota-se $\widehat{I_{S_M,N_C,T_M}}$, $\widehat{I_{S_P,N_C,T_P}}$ e $\widehat{I_{S_D,N_C,T_D}}$ por $\mathbb{I}_M$, $\mathbb{I}_P$ e $\mathbb{I}_D$, respectivamente.*

1. $\mathbb{I}_M(X,Y) = [\min\{\max\{1-\underline{X}, \min\{\underline{X},\underline{Y}\}\}, \max\{1-\overline{X}, \min\{\overline{X},\underline{Y}\}\}\}, \max\{\max\{1-\underline{X}, \min\{\underline{X},\overline{Y}\}\}, \max\{1-\overline{X}, \min\{\overline{X},\overline{Y}\}\}\}]$

$$\mathbb{I}_M(X,Y) = \begin{cases} 1-X & \text{se } \overline{X} \leq 0.5 \text{ ou } (X \ll 0.5 \text{ e } \overline{Y} < 0.5);\\ \inf\{X,Y\} & \text{se } 0.5 < \underline{X};\\ [\min\{1-\underline{X},\overline{X}\}, \max\{1-\underline{X},\overline{X}\}] & \text{se } X < 0.5 \text{ e } \max\{1-\underline{X},\overline{X}\} < \underline{Y};\\ [\min\{\underline{Y}, 1-\overline{X}\}, \overline{X}] & \text{se } X < 0.5 \text{ e } X \subseteq Y;\\ [\min\{\underline{Y}, 1-\underline{X}\}, \overline{Y}] & \text{se } X < 0.5 \text{ e } Y \subseteq X.\end{cases}$$

onde $X < 0.5$ significa que $0.5 \in X$, mas $\underline{X} \neq 0.5$ e $\overline{X} \neq 0.5$.

2. $\mathbb{I}_P(X,Y) = [1 + \overline{X}^2\, \underline{Y} - \overline{X}, 1 + \underline{X}^2\, \overline{Y} - \underline{X}]$.

3. $\mathbb{I}_D(X,Y) = [I_1(X,Y), I_2(X,Y)]$ onde

$$I_1(X,Y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (1 \in X \text{ e } \underline{Y} < 1 \text{ e } \underline{X} < 1\\ \min\{\underline{Y}, 1-\overline{X}\} & \text{se } 1 \notin X \text{ e } \underline{Y} < 1\\ \underline{Y} & \text{se } X = [1,1] \text{ e } \underline{Y} < 1\\ 1 & \text{se } Y = [1,1],\end{cases}$$

$$I_2(X,Y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in X \text{ ou } 1 \in Y\\ \max\{\overline{Y}, 1-\underline{X}\} & \text{se } 1 \in X, \underline{Y} < 1\\ 1-\underline{X} & 1 \notin X.\end{cases}$$

Teorema 10. *Seja $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ uma QL-implicação intervalar. Então $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}$ e $\overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}$ são QL-implicações e*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) = [\inf\{\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(x, \underline{Y}) \mid x \in X\}, \sup\{\overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(x, \overline{Y}) \mid x \in X\}]$$

Teorema 11. *Se $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ é uma QL-implicação intervalar, então*

$$\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}} = I_{\underline{\mathbb{S}},\underline{\mathbb{N}},\underline{\mathbb{T}}} \text{ e } \overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}} = I_{\overline{\mathbb{S}},\overline{\mathbb{N}},\overline{\mathbb{T}}}.$$

Além disso $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ satisfaz $\mathbb{I}2$, então

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) = [\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(\overline{X}, \underline{Y}), \overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(\underline{X}, \overline{Y})]$$

Prova. *Considerando $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}$ uma QL-implicação, então*

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(x, y) &= l(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}([x, x], [y, y])) \\
&= l(\mathbb{S}(\mathbb{N}([x, x]), \mathbb{T}([x, x], [y, y]))) \\
&= \underline{\mathbb{S}}(\underline{\mathbb{N}}(x), \underline{\mathbb{T}}(x, y)) = I_{\underline{\mathbb{S}},\underline{\mathbb{N}},\underline{\mathbb{T}}},
\end{aligned}$$

e portanto, $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}$ é uma QL-implicação. Analogamente, é possível provar que $\overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}} = I_{\overline{\mathbb{S}},\overline{\mathbb{N}},\overline{\mathbb{T}}}$.

Proposição 74. *Seja $\mathbb{I}$ uma implicação fuzzy intervalar. Se $\mathbb{I}$ é uma QL-implicação intervalar, então as propriedades $\mathbb{I}$**3**, $\mathbb{I}$**4**, $\mathbb{I}$**8** e $\mathbb{I}$**12** são satisfeitas.*

Prova. *Considerando $\mathbb{I}$ uma QL-implicação intervalar e $X, Y, Z \in \mathbb{U}$.*
$\mathbb{I}3$: Baseando-se na monotonicidade da t-norma intervalar $\mathbb{T}$ e da t-conorma intervalar$\mathbb{S}$, se $Y \le Z$ então $\mathbb{S}(\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X, Y)) \le \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X, Z))$. Portanto, $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) \le \mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Z)$.
$\mathbb{I}4$: $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}([1, 1], X) = \mathbb{S}(\mathbb{N}([1, 1]), \mathbb{T}([1, 1], X)) = \mathbb{S}([0, 0], X) = X$.
$\mathbb{I}8$: $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, [0, 0]) = \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X, [0, 0])) = \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), [0, 0]) = \mathbb{N}(X)$, e $\mathbb{N}$ é uma negação fuzzy intervalar forte.
$\mathbb{I}12$: Pela Eq.6.4, segue a igualdade: $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}([0, 0], Y]) = \mathbb{S}([1, 1], \mathbb{T}([0, 0], Y))) = \mathbb{S}([1, 1], [0, 0]) = [1, 1]$

Denota-se por $C(S)$, $C(T)$, $C(N)$ e $C(I_{S,N,T})$ as classes das t-conormas contínuas, t-normas continuas, negações fuzzy fortes e QL-implicações, respectivamente. As extensões intervalares relacionadas são indicadas por $C(\mathbb{S})$, $C(\mathbb{T})$, $C(\mathbb{N})$ e $C(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}})$, respectivamente. De acordo com a Seção 7.2.2 juntamente com o Teorema 8 e a proposição 73 a comutatividade é mostrada no diagrama da Fig. 7.2.

$$\begin{tikzcd}
C(S) \times C(N) \times C(T) \arrow[r, "Eq(4.5)"] \arrow[d, "{(Eq(6.2), Eq(6.5), Eq(6.1))}"'] & C(I_{S,N,T}) \arrow[d, "Eq(7.4)"] \\
C(\mathbb{S}) \times C(\mathbb{N}) \times C(\mathbb{T}) \arrow[r, "Eq(7.3)"] & C(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}})
\end{tikzcd}$$

Figura 7.2: Comutatividade da classe de QL-implicações intervalares

Proposição 75. *Se uma QL-implicação fuzzy intervalar $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ satisfaz a simetria contra-positiva em relação a $\mathbb{N}$ ($\mathbb{I}$**11**) então $\mathbb{S}(X, \mathbb{N}(X)) = [1, 1]$, $\forall X \in \mathbb{U}$.*

Prova. *Considerando $\mathbb{I}$ uma QL-implicação intervalar e $X, Y, Z \in \mathbb{U}$ satisfazando ($\mathbb{I}$**11**).*

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}(X, \mathbb{N}(X)) &= \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), X) \\
&= \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X, [1, 1])) \\
&= I_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, [1, 1]) \\
&= I_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(\mathbb{N}([1, 1]), \mathbb{N}(X))(por\ \mathbb{I}\mathbf{11}) \\
&= I_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}([0, 0], \mathbb{N}(X)) \\
&= \mathbb{S}(\mathbb{N}([0, 0]), \mathbb{T}([0, 0], \mathbb{N}(X))) \\
&= \mathbb{S}([1, 1], [0, 0]) = [1, 1]
\end{aligned}$$

Proposição 76. *Se uma QL-implicação intervalar $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ satisfaz a propriedade da antitonicidade no primeiro argumento ($\mathbb{I}$**2**) então $\mathbb{S}(X, \mathbb{N}(X)) = [1, 1]$, $\forall X \in \mathbb{U}$.*

Prova. *Considerando $\mathbb{I}$ uma QL-implicação intervalar e $X, Y, Z \in \mathbb{U}$ satisfazando ($\mathbb{I}$**2**).*

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}(X, \mathbb{N}(X)) &= \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), X) \\
&= \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X, [1, 1])) \\
&= I_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, [1, 1]) \\
&\geq I_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}([1, 1], [1, 1]) = [1, 1](pela\ propriedade\ \mathbb{I}\mathbf{2})
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{S}(X, \mathbb{N}(X)) = [1, 1]$.

Proposição 77. *Se uma QL-implicação intervalar $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ satisfaz a propriedade da antitonicidade no primeiro argumento ($\mathbb{I}$**2**) então $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ satisfaz $\mathbb{I}$**5** se, e somente se, existe uma t-conorma intervalar $\mathbb{S}$ tal que*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) = \mathbb{S}'(\mathbb{N}(X), Y).$$

Prova. *Pelo Teorema 11 $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}$ e $\overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}$ são QL-implicações e $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) = [\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(\overline{X}, \underline{Y}), \overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(\underline{X}, \overline{Y})]$. Se $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ satisfaz a Propriedade $\mathbb{I}$**2** então as projeções $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}$ e $\overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}$ satisfazem a Propriedade **I2**. Logo, pela Propriedade **I5** existem t-conormas S_1 e S_2 tal que $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(\overline{X}, \underline{Y}) = \mathbb{I}_{\underline{\mathbb{S}},\underline{\mathbb{N}},\underline{\mathbb{T}}}(\overline{X}, \underline{Y}) = S_1(\underline{\mathbb{N}}(\overline{X}), \underline{Y})$ e $\overline{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}}(\underline{X}, \overline{Y}) = \mathbb{I}_{\overline{\mathbb{S}},\overline{\mathbb{N}},\overline{\mathbb{T}}}(\underline{X}, \overline{Y}) = S_2(\overline{\mathbb{N}}(\underline{X}), \overline{Y})$. Assim, $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) = [S_1(\underline{\mathbb{N}}(\overline{X}), \underline{Y}), S_2(\overline{\mathbb{N}}(\underline{X}), \overline{Y})]$. Deste modo, se $S_1 \leq S_2$, então F_{S_1,S_2} é uma t-conorma intervalar dada pela expressão $F_{S_1,S_2}(X, Y) = [S_1(\underline{X}, \underline{Y}), S_2(\overline{X}, \overline{Y})]$. Portanto, $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) = F_{S_1,S_2}([\underline{\mathbb{N}}(\overline{X}), \overline{\mathbb{N}}(\underline{X})], [\underline{Y}, \overline{Y}]) = F_{S_1,S_2}(\mathbb{N}(X), Y)$ e logo, $\mathbb{S} = F_{S_1,S_2}$.*

Proposição 78. *Seja $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}$ uma QL-implicação intervalar. Então*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, \mathbb{N}(X)) = \mathbb{N}(X); \quad e \\
&(ii) \quad \mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, Y) = [1, 1] \ \ se,\ e\ somente\ se \ \ X = [0, 0] \ or\ X = Y = [1, 1];
\end{aligned}$$

Prova. (i) *Se $\mathbb{N}(X) \leq sup\{\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X, \mathbb{N}(X))\}$, então $\mathbb{N}(X) \leq \mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, \mathbb{N}(X))$. Sendo, $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, \mathbb{N}(X)) = \widehat{S_M}(\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X, \mathbb{N}(X))) \leq \mathbb{N}(X)$. Portanto, $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, \mathbb{N}(X)) = \mathbb{N}(X)$.*

(ii) Se $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}(X,Y) = [1,1]$ *então* $\widehat{S_M}(\mathbb{N}(X),\mathbb{T}(X,Y)) = sup\{\mathbb{N}(X),\mathbb{T}(X,Y)\} = [1,1]$. *Assim, se* $\mathbb{N}(X) = [1,1]$ *então* $X = [0,0]$ *e se* $\mathbb{T}(X,Y) = [1,1]$ *então* $X = Y = [1,1]$. *Considerando* $X = [0,0]$. *Então* $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}([0,0],Y) = \mathbb{S}_M(\mathbb{N}([0,0]),\mathbb{T}([0,0],Y)) = \mathbb{S}_M([1,1],\mathbb{T}([0,0],Y)) = [1,1]$. *Analogamente, para o caso contrário , se* $X = Y = [1,1]$ *então* $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_M,\mathbb{N},\mathbb{T}}([1,1],[1,1]) = \mathbb{S}_M(\mathbb{N}([1,1]),\mathbb{T}([1,1],[1,1])) = \mathbb{S}_M([0,0],[1,1]) = [1,1]$.

7.2.3 D-Implicações Intervalares

Seja $\mathbb{S}$ uma t-conorma intervalar, $\mathbb{T}$ uma t-norma intervalar e $\mathbb{N}$ uma negação forte intervalar, então uma implicação intervalar é uma D-implicação intervalar dada pela equação:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}(X,Y) = \mathbb{S}(\mathbb{T}(\mathbb{N}(X),\mathbb{N}(Y)),Y)\ ,\ \forall\, X,Y \in [0,1] \tag{7.5}$$

As D-Implicações intervalares são contraposições de QL-Implicações intervalares e vice -versa:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}(N(y),N(x)) &= \mathbb{S}(y,\mathbb{T}(N(y),N(x)))\\ &= \mathbb{S}(\mathbb{T}(N(y),N(x)),y)\\ &= \mathbb{S}(\mathbb{T}(N(x),N(y)),y) = \mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}(x,y)\end{aligned}$$

Proposição 79. *(REISER et al., 2008, Teorema 5.2) Seja S uma t-conorma, T uma t-norma e N uma negação fuzzy . Se S, T e N são contínuas então*

$$\mathbb{I}_{\widehat{S},\widehat{T},\widehat{N}} = \widehat{I_{S,T,N}} \tag{7.6}$$

Corolário 10. *(REISER et al., 2009) Se I é uma D-Implicação contínua então* $\widehat{I}$ *é uma D-implicação intervalar.*

Exemplo 8. *Baseado na Proposição 79, extensões de implicações intervalares pode ser dado pelas expressões seguintes:*

1. $\mathbb{I}_{\widehat{S_L},\widehat{T_M},\widehat{N_C}}(X,Y) = [\min(\min(1-\overline{X},1-\overline{Y})+\underline{Y},1),\min(\min(1-\underline{X},1-\underline{Y})+\overline{Y},1)]$.

2. $\mathbb{I}_{\widehat{S_P},\widehat{T_P},\widehat{N_C}}(X,Y) = [(1-\overline{X})(1-\overline{Y})(1-\underline{Y})+\underline{Y}\ ,\ (1-\underline{X})(1-\overline{Y})(1-\underline{Y})+\overline{Y}] = \widehat{I_{S_P,T_P,N_C}}(X,Y)$.

3. $\mathbb{I}_{\widehat{S_L},\widehat{T_L},\widehat{N_C}}(X,Y) = [\min(\max(1-\overline{X}-\overline{Y},0)+\underline{Y},1),\min(\max(1-\underline{X}-\underline{Y})+\overline{Y},1)]$.

Assim, $\mathbb{I}_{\widehat{S_L},\widehat{T_L},\widehat{N_C}}(X,Y) = \widehat{I_{S_L,T_L,N_C}}(X,Y)$*, e*

$$\mathbb{I}_{\widehat{S_L},\widehat{T_L},\widehat{N_C}}(X,Y) = \begin{cases}[1-\overline{X}-\overline{Y}+\underline{Y}\ ,\ 1-\underline{X}-\underline{Y}+\overline{Y}], & se\ \ \overline{Y}\leq \underline{X}+\underline{Y}\leq \overline{X}+\overline{Y}\leq 1;\\ [1-\overline{X}-\overline{Y}+\underline{Y}\ ,\ 1], & se\ \ \underline{X}+\underline{Y}\leq \overline{Y}\leq \overline{X}+\overline{Y}\leq 1;\\ [\underline{Y}\ ,\ 1-\underline{X}-\underline{Y}+\overline{Y}], & se\ \ \underline{X}+\underline{Y}\leq \overline{Y}\leq 1\leq \overline{X}+\overline{Y};\\ [\underline{Y}\ ,\ \overline{Y}], & c.c.\ \ .\end{cases}$$

Proposição 80. *(REISER et al., 2009) Se I é uma D-Implicação contínua então $\mathbb{I}$ satisfaz as propriedades $\mathbb{I}2$ e $\mathbb{I}4$.*

Denota-se por $C(S)$, $C(T)$, $C(I_{S,T,N})$ e $C(N)$ as classes das t-conormas contínuas, t-normas continuas e das D-implicações e as negações fuzzy fortes , respectivamente. As extensões intervalares relacionadas são indicadas por $C(\mathbb{S})$, $C(\mathbb{T})$, $C(\mathbb{N})$ e $C(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}})$, respectivamente. De acordo com a Seção 4.2.3, juntamente com o Teorema 8 e a Proposição 79 a comutatividade do diagrama da Fig. 7.3 é mostrada logo abaixo.

$$\begin{tikzcd} C(S)\times C(T)\times C(N) \arrow[r, "Eq.(4.7)"] \arrow[d, "{Eq.(6.2), Eq.(6.1), Eq.(6.5)}"'] & C(I_{S,T,N}) \arrow[d, "Eq.(7.6)"] \\ C(\mathbb{S})\times C(\mathbb{T})\times C(\mathbb{N}) \arrow[r, "Eq.(7.5)"] & C(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}) \end{tikzcd}$$

Figura 7.3: Comutatividade da classe das D-implicações Intervalares

7.2.4 R-Implicações Intervalares

Seja $\mathbb{T}$ uma t-norma, então (BEDREGAL et al., 2007): Seja $\mathbb{T} : [0,1]^2 \to [0,1]$ uma t-norma intervalar contínua a esquerda. A função binária $\mathbb{I}_R : [0,1]^2 \to [0,1]$ definida pela expressão:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{T}}(X,Z) = \sup\{z \in [0,1] \mid \mathbb{T}(X,Z) \leq y\} \tag{7.7}$$

é denominada R-implicação intervalar.

Proposição 81. *(B.C. BEDREGAL; REISER, 2009, Teorema 14) Seja $\mathbb{T}$ uma t-norma intervalar (Moore, Scott) contínua à esquerda. Se $\mathbb{I}$ é uma R-implicação intervalar então $\mathbb{I}$ satisfaz $\mathbb{I}$**2**, $\mathbb{I}$**3** e $\mathbb{I}$**12**.*

Teorema 12. *(BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009c) Seja T uma t-norma, então*

$$\mathbb{I}_{\widehat{T}} = \widehat{I_{\mathbb{T}}} \tag{7.8}$$

Observação 5. *Este teorema afirma que as construções de implicações intervalares à partir de implicações derivadas de uma t-norma, corresponde com a implicação intervalar derivada da t-norma intervalar obtida à partir de t-norma. Ou seja, temos a comutatividade garantida pela Eq.7.8.*

Prova. *Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{U}$. Considere o o conjunto $\{Z \in \mathbb{U} \mid [T(\underline{x}, z_i), T(\overline{x}, \overline{z})] \leq Y\}$. Tem-se que:*

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{T}}(X,Y) &= sup\{Z \in \mathbb{U} \mid \mathbb{I}(X,Y) \leq Y\} \\ &= sup\{Z \in \mathbb{U} \mid [T(\underline{x}, z_i), T(\overline{x}, \overline{z})] \leq Y\} \\ &= [sup\{Z \in \mathbb{U} \mid T(\overline{x}, z) \leq \underline{y}\}, sup\{Z \in \mathbb{U} \mid T(\underline{x}, z) \leq \overline{y}\}] \\ &= [I_T(\underline{x}, \underline{y}), I((\overline{x}, \underline{y})] \\ &= \mathbb{I}_{I_T}(X,Y) \end{aligned}$$

Denota-se por $C(T)$ e $C(I_T)$ as classes das t-normas contínuas, e R-implicações, respectivamente. As extensões intervalares relacionadas são indicadas por $C(\mathbb{T})$, e $C(\mathbb{I}_\mathbb{T})$, respectivamente. De acordo com o Teorema 8, juntamente com a Proposição 79, verifica-se a comutatividade do diagrama na Fig. 7.4.

$$\begin{tikzcd} C(T) \arrow[r, "Eq.(4.8)"] \arrow[d, "Eq.(6.1)"'] & C(I_T) \arrow[d, "Eq.(7.8)"] \\ C(\mathbb{T}) \arrow[r, "Eq.(7.7)"] & C(\mathbb{I}_\mathbb{T}) \end{tikzcd}$$

Figura 7.4: Comutatividade da classe de R-implicações intervalares.

Proposição 82. *(BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009c, Teorema 16) Seja $\mathbb{T}$ uma t-norma intervalar contínua à esquerda (no sentido de Moore-Scott). Então $\mathbb{I}_\mathbb{T}$ satisfaz* $\mathbb{I}$**2***,* $\mathbb{I}$**3***,* $\mathbb{I}$**5** *e* $\mathbb{I}$**18**

7.3 Automorfismo Intervalar e Implicação intervalar

Teorema 13. *(BEDREGAL et al., 2007b) Seja $\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ é um automorfismo intervalar e $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ é uma implicação intervalar. A função $\mathbb{I}^\Phi : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ dada pela expressão*

$$\mathbb{I}^\Phi(X, Y) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}(\Phi(X), \Phi(Y))). \tag{7.9}$$

é uma implicação intervalar.

Neste trabalho apresenta-se um estudo dos automorfismos intervalares agindo sobre S-implicações intervalares. De forma análoga, o mesmo estudo pode ser estendido para as demais classes de implicações intervalares: QL-implicações, D-implicações e R-implicações,

7.3.1 Automorfismos intervalares agindo sobre S-implicações intervalares

No seguinte teorema, será mostrado como um automorfismo intervalar age nas S-implicações intervalares, gerando novas S-implicações intervalares.

Teorema 14. *(REISER et al., 2008) Seja $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ um automorfismo intervalar e $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ uma interval S-implicação intervalar . Então $\mathbb{I}^\Phi_{\mathbb{S},\mathbb{N}} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ é uma S-implicação intervalar definida por*

$$\mathbb{I}^\Phi_{\mathbb{S},\mathbb{N}} = \mathbb{I}_{\mathbb{S}^\Phi,\mathbb{N}^\Phi}. \tag{7.10}$$

Prova. *Considerando $X, Y \in \mathbb{U}$, segue-se que*

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}(X,Y) &= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_{S,N}(\Phi(X),\Phi(Y)))\\ &= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\mathbb{N}(\Phi(X)),\Phi(Y))))\\ &= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\Phi\circ\Phi^{-1}(\mathbb{N}(\Phi(X))),\Phi(Y)))\\ &= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\Phi(\mathbb{N}^{\Phi}(X)),\Phi(X,Y))\\ &= \mathbb{S}^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X),Y) = \mathbb{I}_{\mathbb{S}^{\Phi},\mathbb{N}^{\Phi}}(X,Y).\end{aligned}$$

Corolário 11. *Seja $\mathbb{I}$ uma S-implicação intervalar e Φ um automorfismo intervalar. Então, tem-se que$\mathbb{I}^{\Phi}(X,Y) = [\underline{\mathbb{I}}^{\Phi}(\overline{X},\underline{Y}),\overline{\mathbb{I}}^{\Phi}(\underline{X},\overline{Y})]$,onde $\underline{\mathbb{I}}$ e $\overline{\mathbb{I}}$ são projeções, respectivamente, a direita e a esquerda, e Φ é um automorfismo definido pela Eq. (6.9).*

Prova. *É provado, a partir do Teorema 14.*

Proposição 83. *Seja $\mathbb{I}$ uma S-implicação interval, I uma S-implicação e Φ um automorfismo intervalar. Se $\mathbb{I}$ é uma representação intervalar de I, então $\mathbb{I}^{\Phi}$ é uma representação intervalar de $I^{\underline{\Phi}}$.*

Prova. *Se $x \in X$ e $y \in Y$ então, afirma-se que $\underline{\Phi}(x) \in \Phi(X)$ e $\underline{\Phi}(y) \in \Phi(Y)$. Como $\mathbb{I}$ representa I, tem-se que $I(\underline{\Phi}(x),\underline{\Phi}(y)) \in \mathbb{I}(\Phi(X),\Phi(Y))$. Portanto, conclui-se que $\underline{\Phi}^{-1}(I(\underline{\Phi}(x),\underline{\Phi}(y))) \in \Phi^{-1}(\mathbb{I}(\Phi(X),\Phi(Y)))$, que é, $I^{\underline{\Phi}}(x,y) \in \mathbb{I}^{\Phi}(X,Y)$.*

Proposição 84. *Seja $\mathbb{I}$ uma S-implicação intervalar e Φ_1 e Φ_2 automorfismos intervalares. Então, $(\mathbb{I}^{\Phi_1})^{\Phi_2} = \mathbb{I}^{\Phi_1\circ\Phi_2}$.*

Prova. *Considerando $X, Y \in \mathbb{U}$, segue-se que*

$$\begin{aligned}(\mathbb{I}^{\Phi_1})^{\Phi_2}(X,Y) &= \Phi_2^{-1}(\mathbb{I}^{\Phi_1}(\Phi_2(X),\Phi_2(Y)))\\ &= \Phi_2^{-1}(\Phi_1^{-1}(\mathbb{I}(\Phi_1(\Phi_2(X)),\Phi_1(\Phi_2(Y)))))\\ &= \Phi_2^{-1}\circ\Phi_1^{-1}(\mathbb{I}(\Phi_1\circ\Phi_2(X),\Phi_1\circ\Phi_2(Y)))\\ &= (\Phi_1\circ\Phi_2)^{-1}(\mathbb{I}(\Phi_1\circ\Phi_2(X),\Phi_1\circ\Phi_2(Y))) = \mathbb{I}^{\Phi_1\circ\Phi_2}(X,Y).\end{aligned}$$

Teorema 15. *(BEDREGAL et al., 2007b) Seja $\mathbb{I}$ uma S-implicação intervalar e Φ um automorfismo intervalar. Então tem-se que*

$$\widehat{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}}^{\Phi} = \widehat{\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}}^{\widehat{\Phi}} \tag{7.11}$$

Prova. *Considerando $X, Y \in \mathbb{U}$, segue-se que*

$$\begin{aligned}&\widehat{I^{\Phi}}(X,Y)\\ &= [I^{\Phi}(max(\overline{X},\overline{Y}),min(\underline{X},\underline{Y})),I^{\Phi}(min(\underline{X},\underline{Y}),max(\overline{X},\overline{Y}))]\\ &= [\Phi^{-1}(I(\Phi(max(\overline{X},\overline{Y})),\Phi(min(\underline{X},\underline{Y})))),\\ &\qquad\qquad \Phi^{-1}(I(\Phi(min(\underline{X},\underline{Y})),\Phi(max(\overline{X},\overline{Y}))))]\\ &= \widehat{\Phi^{-1}}[I(max(\Phi(\overline{X}),\Phi(\overline{Y})),min(\Phi(\underline{X}),\Phi(\underline{Y}))),\\ &\qquad\qquad I(min(\Phi(\underline{X}),\Phi(\underline{Y})),max(\Phi(\overline{X}),\Phi(\overline{Y})))]\\ &= \widehat{\Phi}^{-1}[I(max(\overline{\widehat{\Phi}(X)},\overline{\widehat{\Phi}(Y)}),min(\underline{\widehat{\Phi}(X)},\underline{\widehat{\Phi}(Y)})),\\ &\quad I(min(\underline{\widehat{\Phi}(X)},\underline{\widehat{\Phi}(Y)}),max(\overline{\widehat{\Phi}(X)},\overline{\widehat{\Phi}(Y)}))]\\ &= \widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{I}(\widehat{\Phi}(X),\widehat{\Phi}(Y)))\ \textit{pela Eq. (3.12)} = \widehat{I}^{\widehat{\Phi}}(X,Y).\end{aligned}$$

Proposição 85. *Seja* $I_{S,N}$ *uma S-implicação e* ϕ *um automorfismo. Então, tem-se que*

$$\widehat{I^{\phi}_{S,N}} = \widehat{I_{S,N}}^{\widehat{\Phi}}. \tag{7.12}$$

Prova.

$$\begin{aligned}
\widehat{I^{\Phi}_{S,N}}(X,Y) &= [\inf\{I^{\Phi}_{S,N}(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}, \\
&\quad \sup\{I^{\Phi}_{S,N}(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}] \\
&= [I^{\Phi}_{S,N}(\overline{X}, \underline{Y}), I^{\Phi}_{S,N}(\underline{X}, \overline{Y})] \\
&= [\Phi^{-1}(I_{S,N}(\Phi(\overline{X}), \Phi(\underline{Y}))), \Phi^{-1}(I_{S,N}(\Phi(\underline{X}), \Phi(\overline{Y})))] \\
&= \widehat{\Phi^{-1}}([I_{S,N}(\Phi(\overline{X}), \Phi(\underline{Y})), I_{S,N}(\Phi(\underline{X}), \Phi(\overline{Y}))]) \\
&= \widehat{\Phi}^{-1}([I_{S,N}(\Phi(\overline{X}), \Phi(\underline{Y})), I_{S,N}(\Phi(\underline{X}), \Phi(\overline{Y}))]) \\
&= \widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{I_{S,N}}(\widehat{\Phi}(X), \Phi(Y))) = \widehat{I_{S,N}}^{\widehat{\Phi}}(X,Y)
\end{aligned}$$

Corolário 12. *Seja* $I_{S,N}$ *uma S-implicação e* ϕ *um automorfismo. Então,* $\widehat{I^{\phi}_{S,N}} = \mathbb{I}_{\widehat{S^{\Phi}},\widehat{N^{\Phi}}}$.

Prova. *Segue a partir do Teorema 71, da Proposição 68, Teorema 14 e Proposição 85.*

De acordo com a Proposição 85, a comutatividade do diagrama é representada na Fig. 7.5.

$$\begin{tikzcd}
C(\mathbb{S}) \times C(\mathbb{N}) \arrow[r, "Eq.(7.2)"] \arrow[d, "{Eq.(6.2), Eq.(6.5)}"'] & C(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}) \arrow[d, "Eq.(7.9)"] \\
C(\mathbb{S}^{\Phi}) \times C(\mathbb{N}^{\Phi}) \arrow[r, "Eq.(7.10)"] & C(\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{N}})
\end{tikzcd}$$

Figura 7.5: Ação do automorfismo intervalar Φ sobre as S-implicações Intervalares.

Baseado no Teorema 14, S-implicações (intervalar) e automorfismos (intervalar) podem ser vistos como objetos e morfismos respectivamente, da classe. $\mathfrak{C}(C(I), Aut(I))$ ($\mathfrak{C}(C(\mathbb{I}), Aut(\mathbb{I}))$). Por esta abordagem, a ação de um automorfismo intervalar sobre uma S-implicação intervalar pode ser atribuída a uma função covariante cuja aplicação sobre S-implicações e automorfismos em $\mathfrak{C}(C(I), Aut(I))$ retorna a melhor representação intervalar sobre $\mathfrak{C}(C(\mathbb{I}), Aut(\mathbb{I}))$.

7.3.2 Automorfismo Intervalar agindo sobre QL-implicação Intervalar

Proposição 86. *(REISER et al., 2010) Seja* $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ *uma QL-implicação intervalar onde* $\mathbb{T}$ *uma t-norma intervalar contínua e estrita. Então existe um automorfismo intervalar* $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *tal que*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}} = \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\mathbb{N}(\Phi(X)), \mathbb{T}(\Phi(X), \Phi(Y))) \tag{7.13}$$

Proposição 87. *(BEDREGAL et al., 2007b) Seja* $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ *uma QL-implicação intervalar, onde* $\mathbb{T}$ *é uma t-norma intervalar contínua tal que* $\mathbb{T}(X, N(X)) = [0,0]$*. Então existe um* *automorfismo intervalar* $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *tal que*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X,Y) = \mathbb{S}((\mathbb{N}(X), \widehat{T_L}^{\Phi}(X,Y))) \text{ and } \mathbb{N}(X) \leq \mathbb{N}_C^{\Phi}(X).$$

$\widehat{T_L}^{\Phi}(X,Y) = \Phi^{-1}(sup\{\Phi(X) + \Phi(Y) - [1,1], [0,0]\})$ *é a ação do automorfismo intervalar* Φ *sobre t-conorma intervalar de Lukasiewicz.*

Corolário 13. *(REISER et al., 2007)Seja* $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ *uma QL-implicação intervalar, where* $\mathbb{T}$ *é uma t-norma intervalar contínua dada por* $\mathbb{T}(X, \mathbb{N}(X)) = 0$*. Então,* $\forall X \in \mathbb{U}$*,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X, \mathbb{N}(X)) = \mathbb{N}(X).$$

Teorema 16. *Seja* $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *um automorfismo intervalar* $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *uma QL-implicação intervalar. Então* $\mathbb{I}^{\Phi} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ *é uma QL-implicação intervalar definida por*

$$\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X,Y) = \mathbb{S}^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X), \mathbb{T}^{\Phi}(X,Y)). \tag{7.14}$$

Prova. *Considerando* $X, Y \in \mathbb{U}$*,tem-se que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X,Y) &= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_{S,N,T}(\Phi(X), \Phi(Y))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\mathbb{N}(\Phi(X)), \mathbb{T}(\Phi(X), \Phi(Y)))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\Phi \circ \Phi^{-1}(\mathbb{N}(\Phi(X))), \Phi \circ \Phi^{-1}(\mathbb{T}(\Phi(X), \Phi(Y))))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\Phi(\mathbb{N}^{\Phi}(X)), \Phi(\mathbb{T}^{\Phi}(X,Y)))) \\
&= \mathbb{S}^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X), \mathbb{T}^{\Phi}(X,Y))
\end{aligned}$$

Proposição 88. *(MAS; MONSERRAT; TORRENS, 2007) Seja* $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}$ *uma QL-implicação intervalar, onde* $\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\Phi}_C$*. Então existe um automorfismo* $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *tal que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X,Y) &= \Phi^{-1}(\min([1,1] - \Phi(X) + \Phi(\mathbb{T}(X,Y)), [1,1]))) \\
&= \Phi^{-1}([1,1] - \Phi(X) + \Phi(\mathbb{T}(X,Y))).
\end{aligned}$$

Proposição 89. *Seja* Φ *e* Φ' *um automorfismo intervalar em* $\mathbb{U}$ *de forma que a QL-implicação intervalar* $\mathbb{I}_{\widehat{S_L}^{\Phi},\mathbb{N},\widehat{T_L}^{\Phi'}}$ *satisfaz a Prop.* $\mathbb{I}$**10** *se, e somente se,* $\mathbb{N}$ *satisfaz* $\widehat{N_C}^{\Phi}(X) \leq \mathbb{N}(X) \leq \widehat{N_C}^{\Phi'}(X)$.

e $\mathbb{I}_{\widehat{S_L}^{\Phi},\mathbb{N},\widehat{T_L}^{\Phi'}}$ *é expressa por*

$$\mathbb{I}_{\widehat{S_L}^{\Phi},\mathbb{N},\widehat{T_L}^{\Phi'}}(X,Y) = \begin{cases} N(X), & \widehat{T_L}^{\Phi'}(X,Y) = [0,0]; \\ Y, & [0,0] < \widehat{T_L}^{\Phi'}(X,Y) < \widehat{N_C}^{\Phi}(X); \\ [1,1], & \widehat{T_L}^{\Phi'}(X,Y) \geq \widehat{N_C}^{\Phi}(X). \end{cases}$$

De acordo com o Teorema 16, a comutatividade é representada no diagrama na Fig. 7.6.

7.3.3 Automorfismos Intervalares agindo sobre D-implicações Intervalares

A seguir, é mostrado que a ação de um automorfismo intervalar preserva uma D-implicação intervalar.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
C(\mathbb{S}) \times C(\mathbb{N}) \times C(\mathbb{T}) \arrow[r, "Eq.(7.3)"] \arrow[d, "{Eq.(6.2), Eq.(6.5), Eq.(6.1)}"'] & C(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}) \arrow[d, "Eq.(7.9)"] \\
C(\mathbb{S}^{\Phi}) \times C(\mathbb{N}^{\Phi}) \times C(\mathbb{T}^{\Phi}) \arrow[r, "Eq.(7.14)"] & C(\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}})
\end{tikzcd}$$

Figura 7.6: Ação do automorfismo intervalar Φ sobre as QL-implicações Intervalares

Teorema 17. *(REISER et al., 2008) Seja $\Phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ um automorfismo intervalar e $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ uma D-implicação intervalar. Então $\mathbb{I}^{\Phi} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ também é uma D-implicação intervalar.*

Prova. *Isto é suficiente para verificar as seguintes equações:*

$$\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}(X, Y) = \mathbb{S}^{\Phi}(\mathbb{T}^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X), \mathbb{N}^{\Phi}(Y)), Y) \tag{7.15}$$

Considerando $X, Y \in \mathbb{U}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}(X, Y) &= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}(\Phi(X), \Phi(Y))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\mathbb{T}(\mathbb{N}(\Phi(X), \mathbb{N}\Phi(Y))), \Phi(Y)) \\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\mathbb{T}(\Phi(\Phi^{-1}(\mathbb{N}\Phi(X)))), \Phi(\Phi^{-1}(\mathbb{N}\Phi(Y))))), \Phi(Y) \qquad \textit{pela bijetividade de } \Phi \\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{S}(\Phi(X), \mathbb{N}\Phi((\Phi^{-1}(\mathbb{T}(\Phi(\mathbb{N}^{\Phi})(X)), \Phi(\mathbb{N}^{\Phi}(Y))))), \Phi(Y)) \\
&= \mathbb{S}^{\Phi}(\mathbb{T}^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X), \mathbb{N}^{\Phi}(Y)), Y)
\end{aligned}$$

Proposição 90. *Seja $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}$ uma D-implicação e Φ um automorfismo. Então,*

$$\widehat{\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}} = \mathbb{I}_{\widehat{\mathbb{S}^{\Phi}},\widehat{\mathbb{N}^{\Phi}}}. \tag{7.16}$$

De acordo com o Teorema 17 e a Proposição 90 , vale a comutatividade no diagrama na Fig. 7.7.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
C(\mathbb{S}) \times C(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{N}) \arrow[r, "Eq.(7.5)"] \arrow[d, "{Eq.(6.2), Eq.(6.1), Eq.(6.5)}"'] & C(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}}) \arrow[d, "Eq.(7.9)"] \\
C(\mathbb{S}^{\Phi}) \times C(\mathbb{T}^{\Phi}) \times C(\mathbb{N}^{\Phi}) \arrow[r, "Eq.(7.15)"] & C(\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{T},\mathbb{N}})
\end{tikzcd}$$

Figura 7.7: Ação do automorfismo intervalar Φ sobre as D-implicações Intervalares

7.3.4 Automorfismos Intervalares agindo sobre R-implicações Intervalares

O próximo teorema estabelece que é irrelevante a ordem em que se aplicam os construtores de automorfismos intervalares e de representação intervalar (representação canônica). Ou seja, o automorfismo intervalar aplicado sobre uma R-implicação obtida pela representação canônica de uma t-norma intervalar é análogo à ação de automorfismo intervalar aplicado sobre a representação canônica para R-implicação fuzzy.

Teorema 18. *(BEDREGAL; REISER; DIMURO, 2009c) Seja $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ um automorfismo intervalar e $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ uma R-implicação intervalar. Então $\mathbb{I}^{\Phi} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ também é uma R-implicação intervalar , definida por*

$$\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{T}} = \mathbb{I}_{\widehat{\mathbb{T}^{\Phi}}}. \qquad (7.17)$$

De acordo com o Teorema 18, a comutatividade é representada no diagrama na Fig. 7.8. Para tal, tem-se a seguinte notação:

- $C(T)$ e $C(\mathbb{T})$ denotam a classe das t-normas e t-normas valoradas intervalarmente, respectivamente;

- $C(I)$ e $C(\mathbb{I})$ denotam a classe das implicações e implicações valoradas intervalarmente, respectivamente;

- $C(I_T)$ e $C(\mathbb{I}_{\mathbb{T}})$ denotam a classe das R-implicações e R-implicações valoradas intervalarmente, respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
C(\mathbb{T}) \arrow[r, "Eq.(7.8)"] \arrow[d, "Eq.(6.1)"'] & C(\mathbb{I}_{\mathbb{T}}) \arrow[d, "Eq.(7.9)"] \\
C(\mathbb{T}^{\Phi}) \arrow[r, "Eq.(7.17)"] & C(\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{T}})
\end{tikzcd}$$

Figura 7.8: Ação do automorfismo intervalar Φ sobre as R-implicações Intervalares

7.4 Considerações Finais

A preservação de propriedades reportadas neste capítulo por proposições e teoremas, assim como as definições que estendem as classes de conectivos fuzzy para correspondente abordagem intervalar, tornaram viável a integração dos correspondentes diagramas comutativos apresentados na Figura 7.1 e Figura 7.5, resultando no diagrama comutativo descrito na Figura 7.9.

Neste diagrama-cubo tem-se três dimensões, cada uma interpretando uma das estruturas abordadas neste trabalho:

(i) na face posterior, tem-se a representação dos operadores de agregação e negação fuzzy, os quais são responsáveis pela representação explícita das classes de implicações e de S-implicações.

(ii) na primeira face, tem-se a representação intervalar dos operadores de agregação e negação fuzzy, os quais são responsáveis pela representação explícita das classes de implicações intervalares e de S-implicações intervalares, considerando a melhor representação intervalar de cada operador, ou seja, as correspondentes representações canônicas.

(iii) nas faces laterais, tem-se a representação intervalar dos operadores de agregação e negação à esquerda, bem como a representação intervalar da classe de implicações, à esquerda.

(iv) na face inferior, considera-se a representação do relacionamento entre as classes de conjugadas de cada um destes operadores: t-conorma S, negação N, implicação I e S-implicação $I_{S,N}$, incluindo os relacionamentos entre as correspondentes extensões intervalares destes operadores bem como a ação de automorfismos intervalares.

$$\begin{tikzcd}
C(S)\times C(N) \arrow[rr, "Eq.\ (4.2)"] \arrow[dd, "Eq.\ (3.14),\ Eq.\ (3.16)"'] \arrow[dr, "Eq.\ (2.7)"] & & C(I_{S,N}) \arrow[dd, "Eq.\ (3.12)"'] \arrow[dr, "Eq.\ (2.7)"] & \\
& C(\mathbb{S})\times C(\mathbb{N}) \arrow[rr, "Eq.\ (7.2)"] \arrow[dd, "Eq.\ (6.2),\ Eq.\ (6.5)"] & & C(\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}) \arrow[dd, "Eq.\ (7.9)"] \\
C(S^{\phi})\times C(N^{\phi}) \arrow[rr, "Eq.\ (4.9)"] \arrow[dr, "Eq.\ (2.7)"] & & C(I^{\phi}_{S,N}) \arrow[dr, "Eq.\ (2.7)"] & \\
& C(\mathbb{S}^{\Phi})\times C(\mathbb{N}^{\Phi}) \arrow[rr, "Eq.\ (7.10)"] & & C(\mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{S},\mathbb{N}})
\end{tikzcd}$$

Figura 7.9: Diagrama comutativo relacionando as classes de S-implicações, S-implicações intervalares e apresentando a ação de automorfismos sobre estas classes.

8 A-IMPLICAÇÕES FUZZY VALORADAS INTERVALARMENTE

Neste capítulo apresenta-se a extensão intervalar das A-implicações fuzzy e o estudo de algumas propriedades das A-implicações intervalares. E também, a construção da extensão intervalar das principais subclasses de implicações fuzzy da classe de A-implicações, como a implicação de Yager e a implicação G_h, incluindo avaliação da ação de automorfismo e relações de dualidade. Na sequência, outras quatro propriedades de implicações fuzzy intervalares serão consideradas, as quais são relevantes para a axiomatização na representação das A-implicações intervalares. Para tal, considera-se uma t-norma intervalar $\mathbb{T}$.

$\mathbb{I}$**19** : $\mathbb{I}(X, \mathbb{T}(Y, Z)) = \mathbb{T}(\mathbb{I}(X, Y), \mathbb{I}(X, Z))$;

$\mathbb{I}$**20** : $\mathbb{I}(\mathbb{T}(X, Y), Z) = \mathbb{I}(X, \mathbb{I}(Y, Z))$;

$\mathbb{I}$**21** : $\mathbb{T}(\mathbb{I}(X, Y), \mathbb{I}(\mathbb{N}(X), Y)) = Y$;

$\mathbb{I}$**22** : $\mathbb{T}(\mathbb{I}([0.5, 0.5]; Y), \mathbb{I}([0.5, 0.5]; Y) = Y$.

8.1 Extensão Intervalar das A-Implicações Fuzzy

Baseando-se na seção 5.1, apresenta-se a seguir uma extensão intervalar para a classe das A-implicações fuzzy.

Definição 27. *Uma implicação fuzzy intervalar $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ pertence a classe das A-implicações intervalares se existem uma t-norma intervalar $\mathbb{T} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ e uma negação fuzzy intervalar $\mathbb{N} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ tal que $\mathbb{I}$ verifica algumas das propriedades $\mathbb{I}11$, $\mathbb{I}19$, $\mathbb{I}20$, $\mathbb{I}21$ e $\mathbb{I}22$.*

Com base na definição de particulares $t-$normas intervalares e negações fuzzy intervalares, expressões para as implicações fuzzy intervalares que não pertencem às classes de representação explícita e nem às classes de representação implícitas, mas que podem pertencer a classe das A-implicações intervalares, são reportadas na Proposição 91:

Proposição 91. *Sejam $\mathbb{T} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$, $\mathbb{T}(X, Y) = X \cdot Y$, a t-norma do produto intervalar contínua e $\mathbb{N} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $\mathbb{N}(X) = [1, 1] - X$, a negação fuzzy intervalar padrão. Assume-se que $\mathbb{I} : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ é uma função contínua em $\mathbb{U}^2$, exceto nos seus pontos extremos* $([0, 0]; [0, 0])$ *e* $([1, 1]; [1, 1])$. *Então, considerando-se que $\mathbb{I}$ satisfaz a Propriedade $\mathbb{I}$**1** e:*

(i) *se $\mathbb{I}$ também satisfaz as Propriedades $\mathbb{I}$**19** e $\mathbb{I}$**20**, então para todo número real $R \geq 0$, a função $\mathbb{I}$ tem representação dada pela expressão:*

$$\mathbb{I}(X,Y) = \begin{cases} [1,1], & se\ X = [0,0] \quad e \quad Y = [0,0]; \\ Y^{X^R}, & c.c. \end{cases} \tag{8.1}$$

(ii) *se $\mathbb{I}$ também satisfaz as propriedades $\mathbb{I}$**19**, $\mathbb{I}$**20** e $\mathbb{I}$**22**, então a função $\mathbb{I}$ tem representação dada pela expressão:*

$$\mathbb{I}(X,Y) = \begin{cases} [1,1], & se\ X = Y = [0,0]\ ; \\ Y^{X}, & c.c. \end{cases} \tag{8.2}$$

(iii) *se $\mathbb{I}$ também satisfaz as propriedades $\mathbb{I}$**20** e $\mathbb{I}$**21**, então a função $\mathbb{I}$ tem representação dada pela expressão:*

$$\mathbb{I}(X,Y) = \begin{cases} [1,1], & se\ X = Y = [0,0]\ ; \\ Y^{X}, & c.c. \end{cases} \tag{8.3}$$

(iv) *se $\mathbb{I}$ também satisfaz as propriedades $\mathbb{I}$**19** e $\mathbb{I}$**11**, para todo número real $K > 0$, então a função $\mathbb{I}$ tem representação dada pela expressão:*

$$\mathbb{I}(X,Y) = \begin{cases} [1,1], & se\ X = Y = [0,0]\ ou\ X = Y = [1,1]\ ; \\ [0,0], & se\ X = [1,1]\ e\ Y \neq 1\ ; \\ [0,0], & se\ Y = [0,0]\ e\ X \neq 0\ ; \\ e^{-K.ln([1,1]-X).lnY}, & c.c. \end{cases} \tag{8.4}$$

sendo $lnX : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ a função logarítmica definida na seção 2.3.3.

8.2 Implicação de Yager Intervalar

Proposição 92. *Seja $\mathbb{I}_Y : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ a função definida como*

$$\mathbb{I}_Y(X,Y) = [1,1],\ se\ X = Y = [0,0] \quad e \quad \mathbb{I}_Y(X,Y) = Y^X = [\underline{Y}^{\overline{X}}, \overline{Y}^{\underline{X}}],\ \ c.c. \tag{8.5}$$

$\mathbb{I}_Y$ é uma implicação fuzzy intervalar chamada de Implicação de Yager Intervalar.

Prova. *Por definição, $\mathbb{I}_Y([0,0],[0,0] = [1,1]$. Além disso, $\mathbb{I}_Y([0,0],[1,1]) = \mathbb{I}_Y([1,1],[0,0]) = \mathbb{I}_Y([1,1],[1,1]) = [1,1]$.*

Proposição 93. *Seja I_Y uma implicação de Yager, então a sua representação canônica é dada pela expressão:*

$$\mathbb{I}_Y(X,Y) = \widehat{I_Y}(X,Y) = [I_Y(\overline{X},\underline{Y}), I_Y(\underline{X},\overline{Y})]. \tag{8.6}$$

Prova. *Segue-se pela Proposição 92, pela Eq.7.1 do Teorema 8 e pela Proposição 46.*

Proposição 94. *$\mathbb{I}_Y$ satisfaz as seguintes propriedade: $\mathbb{I}$**2** – $\mathbb{I}$**5**, $\mathbb{I}$**9**, $\mathbb{I}$**12** – $\mathbb{I}$**13** e $\mathbb{I}$**18** – $\mathbb{I}$**22**.*

Prova. *Seja $X, Y, Z \in U$. Pela caracterização de $\mathbb{I}_Y$, dada na Eq.8.6 , tem-se que*

$\mathbb{I}\mathbf{2}$ *Se* $X \leq Z$ *então* $\underline{X} \leq \underline{Z}$ *e* $\overline{X} \leq \overline{Z}$. *Logo, tem-se que* $\overline{Y}^{\underline{X}} \geq \overline{Y}^{\underline{Z}}$ *e* $\underline{Y}^{\overline{X}} \geq \underline{Y}^{\overline{Z}}$.*Assim,* $Y^Z = [\underline{Y}^{\overline{Z}}; \overline{Y}^{\underline{Z}}] \leq [\underline{Y}^{\overline{X}}; \overline{Y}^{\underline{X}}] = Y^Z$. *Portanto, se* $X \leq Z$ *então* $Y^X \geq Y^Z$.

$\mathbb{I}\mathbf{3}$ *Se* $Y \leq Z$ *então* $\underline{Y} \leq \underline{Z}$ *e* $\overline{Y} \leq \overline{Z}$. *Logo, tem-se que* $\overline{Y}^{\underline{X}} \leq \overline{Z}^{\underline{X}}$ *e* $\underline{Y}^{\overline{X}} \leq \underline{Z}^{\overline{X}}$.*Assim,* $Y^X = [\underline{Y}^{\overline{X}}; \overline{Y}^{\underline{X}}] \leq [\underline{Z}^{\overline{X}}; \overline{Z}^{\underline{X}}] = Z^X$. *Portanto, se* $Y \leq Z$ *então* $Y^X \leq Z^X$.

$\mathbb{I}\mathbf{4}$ $\mathbb{I}_Y([1,1], Y) = Y^{[1,1]} = [\underline{Y}^1; \overline{Y}^1] = [\underline{Y}; \overline{Y}] = Y$;

$\mathbb{I}\mathbf{5}$ $\mathbb{I}_Y(X, \mathbb{I}_Y(Y, Z)) = (Z^Y)^X = [\underline{Z}^{\overline{Y}}; \overline{Z}^{\underline{Y}}]^X = [\underline{Z}^{\overline{Y}}; \overline{Z}^{\underline{Y}}]^{[\underline{X};\overline{X}]} = [(\underline{Z}^{\overline{Y}})^{\overline{X}}; (\overline{Z}^{\underline{Y}})^{\underline{X}}] = [(\underline{Z}^{\overline{X}})^{\overline{Y}}; (\overline{Z}^{\underline{X}})^{\underline{Y}}] = [\underline{Z}^{\overline{X}}; \overline{Z}^{\underline{X}}]^{[\underline{Y};\overline{Y}]} = [\underline{Z}^{\overline{X}}; \overline{Z}^{\underline{X}}]^Y = (Z^X)^Y = \mathbb{I}_Y(Y, \mathbb{I}_Y(X, Z))$;

$\mathbb{I}\mathbf{9}$ $\mathbb{I}_Y(X, [1,1]) = [1,1]^X = [1^{\overline{X}}, 1^{\underline{X}}] = [1,1]$;

$\mathbb{I}\mathbf{12}$ $\mathbb{I}_Y([0,0], X) = X^{[0,0]} = [(\overline{X})^0, (\underline{X})^0] = [1,1]$;

$\mathbb{I}\mathbf{13}$ *Como* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz a propriedade* $\mathbb{I}\mathbf{3}$ *e supondo* $Y \geq 0$, *então* $I(X, Y) \geq I(X, [0,0]) = \mathbb{N}_I(X, [0,0])$;

$\mathbb{I}\mathbf{18}$ *Supondo-se agora* $X \leq Y$. *Logo, se* $X = Y = [0,0]$ *ou* $X = Y = [1,1]$ *ou ainda, se* $Y = [1,1]$ *e* $X \leq 1$, *tem-se que* $\mathbb{I}_Y(X, Y) = Y^X = 1$. *Portanto,* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz a condição de contorno;*

$\mathbb{I}\mathbf{19}$ *Sempre que* $\mathbb{T}(X, Y) = X \cdot Y$, $\mathbb{I}_Y(X, \mathbb{T}(Y, Z)) = \mathbb{I}_Y(X, Y \cdot Z) = (Y \cdot Z)^X$; *Considerando a definição e propriedades da multiplicação intervalar da Seção 2.3.3, então tem-se:* $\mathbb{I}_Y(X, \mathbb{T}(Y, Z)) = Y^X \cdot Z^X$. *Portanto:* $\mathbb{T}(\mathbb{I}_Y(X, Y), \mathbb{I}_Y(X, Z)) = \mathbb{I}_Y(X, \mathbb{T}(Y, Z))$;

$\mathbb{I}\mathbf{20}$ *Sempre que* $\mathbb{T}(X, Y) = X \cdot Y$, $\mathbb{I}_Y(\mathbb{T}(X, Y), Z) = \mathbb{I}_Y(X \cdot Y, Z) = Z^{X \cdot Y}$. *Considerando a definição de multiplicação intervalar e de potenciação intervalar da Seção 2.3.3, então tem-se:* $\mathbb{I}_Y(\mathbb{T}(X, Y), Z) = (Z^Y)^X$. *Portanto:* $\mathbb{I}_Y(X, \mathbb{I}_Y(Y, Z)) = \mathbb{I}_Y(\mathbb{T}(X, Y), Z)$;

$\mathbb{I}\mathbf{21}$ *Sempre que* $\mathbb{T}(X, Y) = X \cdot Y$, $\mathbb{T}(\mathbb{I}_Y(X, Y), \mathbb{I}_Y(N(X), Y)) = Y^X \cdot Y^{[1,1]-X}$. *Considerando a definição e propriedades da multiplicação intervalar e de potenciação intervalar da Seção 2.3.3, conclui-se que:* $\mathbb{T}(\mathbb{I}_Y(X, Y), \mathbb{I}_Y(N(X), Y)) = Y$;

$\mathbb{I}\mathbf{22}$ *Sempre que* $\mathbb{T}(X, Y) = X \cdot Y$, $\mathbb{T}(\mathbb{I}_Y([0.5, 0.5], Y), \mathbb{I}_Y([0.5, 0.5], Y)) = Y^{[0.5,0.5]} \cdot Y^{[0.5,0.5]} = [(\overline{Y})^{0.5}, (\underline{Y})^{0.5}] \cdot [(\overline{Y})^{0.5}, (\underline{Y})^{0.5}]$. *Considerando a definição e propriedades da multiplicação intervalar e de potenciação intervalar da Seção 2.3.3, conclui-se que* $\mathbb{T}(\mathbb{I}_Y([0.5, 0.5], Y), \mathbb{I}_Y([0.5, 0.5], Y)) = Y$.

Portanto, a implicação de Yager intervalar satisfaz $\mathbb{I}\mathbf{2} - \mathbb{I}\mathbf{5}$, $\mathbb{I}\mathbf{9}$, $\mathbb{I}\mathbf{12}$, $\mathbb{I}\mathbf{13}$ *e* $\mathbb{I}\mathbf{18} - \mathbb{I}\mathbf{22}$.

Proposição 95. *As propriedades* $\mathbb{I}\mathbf{6} - \mathbb{I}\mathbf{8}$, $\mathbb{I}\mathbf{10}$, $\mathbb{I}\mathbf{11}$ *e* $\mathbb{I}\mathbf{14} - \mathbb{I}\mathbf{1}$ *não são verificadas pela implicação fuzzy de Yager intervalar dada pela Proposição 92.*

$\mathbb{I}\mathbf{6}$ Sejam $Y^X = [(\underline{Y})^{\overline{X}}, (\overline{Y})^{\underline{X}}]$ e $(Y^X)^X = [\underline{Y}^{\overline{X}}, \overline{Y}^{\underline{X}}]^X = [\underline{Y}^{\overline{X}}, \overline{Y}^{\underline{X}}]^{[\underline{X},\overline{X}]} = [\underline{Y}^{\overline{X}^2}, \overline{Y}^{\underline{X}^2}]$. Logo $Y^X = (Y^X)^X$ somente se $\underline{Y}^{\overline{X}^2} = \underline{Y}^{\overline{X}}$, se $\overline{X}^2 = \overline{X}$ e $\overline{Y}^{\underline{X}^2} = \overline{Y}^{\underline{X}}$, se $\underline{X}^2 = \underline{X}$. Caso contrário, $\mathbb{I}_Y$ não verifica a propriedade $\mathbb{I}\mathbf{6}$.

$\mathbb{I}$**7** Seja $(\mathbb{N}(X))^X = ([1,1] - [\underline{X}, \overline{X}]^{[\underline{X},\overline{X}]} = ([1-\underline{X}, 1-\overline{X}]^{[\underline{X},\overline{X}]} = ([(1-\underline{X})^{\overline{X}}, (1-\overline{X})^{\underline{X}}]) = (\mathbb{N}(\underline{X})^{\overline{X}}, \mathbb{N}(\overline{X})^{\underline{X}}) \neq \mathbb{N}(X)$. Portanto,$\mathbb{I}_Y$ não verifica a propriedade $\mathbb{I}$**7**.

$\mathbb{I}$**8** $\mathbb{I}_Y(X,[0,0]) = [0,0]^X = [0^{\overline{X}}, 0^{\underline{X}}] = [1,1]$ se $X = [0,0]$, e $\mathbb{I}_Y(X,[0,0]) = [0,0]$, caso contrário. Logo, $\mathbb{I}_Y$ não verifica a propriedade $\mathbb{I}$**8**.

$\mathbb{I}$**10** $\mathbb{I}_Y(X,Y) \geq Y$. Como $0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} \leq 1$, então $\underline{Y}^{\overline{X}} \leq \underline{Y}$ e $\overline{Y}^{\underline{X}} \leq \overline{Y}$.

$\mathbb{I}_Y(X,Y) = [\underline{Y}^{\overline{X}}; \overline{Y}^{\underline{X}}] \leq [\underline{Y}, \overline{Y}] = Y$. Portanto $\mathbb{I}_Y$ não verifica a propriedade $\mathbb{I}$**10**

$\mathbb{I}$**11** Considerando-se $\mathbb{I}_Y(\mathbb{N}(Y), \mathbb{N}(X)) = \mathbb{N}(X)^{\mathbb{N}(Y)}$, tem-se que $X = \mathbb{N}(Y)$ e $Y = \mathbb{N}(X)$ ou $X = Y = [0,0]$. Logo $\mathbb{I}_Y$ não satisfaz a simetria contrapositiva.
De forma análoga, as demais propriedades podem ser demonstradas.

Proposição 96. *$\mathbb{I}_Y$ não é uma $\mathbb{S}$-implicação intervalar e nem uma $\mathbb{R}$-implicação intervalar.*

Prova. *Pela Proposição 95, tem-se que $\mathbb{I}_Y$ não satisfaz a Propriedade $\mathbb{I}$**11** e nem satisfaz a Propriedade $\mathbb{I}$**12**. Portanto, baseando-se na Proposição 72 e na Proposição 82, $\mathbb{I}_Y$ não é $\mathbb{S}$-implicação intervalar nem $\mathbb{R}$-implicação intervalar.*

Corolário 14. *$\mathbb{I}_Y$ não é uma $\mathbb{QL}$-implicação intervalar.*

Prova. *Pela Proposição 95, $\mathbb{I}_Y$ não satisfaz a Propriedade $\mathbb{I}$**8** . Portanto, pela Proposição 74, $\mathbb{I}_Y$ também não é uma $\mathbb{QL}$-implicação intervalar.*

8.2.1 Φ-conjugada da Implicação de Yager Intervalar

Pela definição de automorfismo intervalar, a Φ-conjugada da implicação de Yager intervalar é dada pela expressão:

$$\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Y) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(Y))) \tag{8.7}$$

Aplicando-se a Equação 8.5 da Proposição 92, tem-se:

(i) $\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Y) = [\Phi(Y)]^{\Phi(X)} = [1,1]$, se $X = Y = [0,0]$, pois $\Phi([0,0]) = [0,0]$;

(ii) $\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Y) = [\Phi(Y)]^{\Phi(X)} = [\Phi(\underline{Y})^{\Phi(\overline{X})}, \Phi(\overline{Y})^{\Phi(\underline{X})}]$, sempre que $\Phi(Y) = [\Phi(\underline{Y}), \Phi(\overline{Y})]$ e $\Phi(X) = [\Phi(\underline{X}), \Phi(\overline{X})]$.

Proposição 97. *Seja Φ um automorfismo. A função conjugada $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ de $\mathbb{I}_Y$ é também uma implicação fuzzy intervalar.*

Prova. *Considerando $\mathbb{I}_Y$ uma implicação de Yager intervalar, cuja definição é dada pela Eq. (8.5).*

$\mathbb{I}$**1** *Segundo a Definição 15 e a Eq.6.10, tem-se que:*

$$\mathbb{I}_Y^{\Phi}([0,0],[0,0]) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi([0,0]), \Phi([0,0]))) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y([0,0],[0,0])) = [1,1];$$

$$\mathbb{I}_Y^{\Phi}([0,0],[1,1]) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi([0,0]),\Phi([1,1]))) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y([0,0],[1,1])) = [1,1];$$

$$\mathbb{I}_Y^{\Phi}([1,1],[1,1]) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi([1,1]),\Phi([1,1]))) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y([1,1],[1,1])) = [1,1];$$

$$\mathbb{I}_Y^{\Phi}([1,1],[0,0]) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi([1,1]),\Phi([0,0]))) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y([1,1],[0,0])) = [0,0].$$

Assim, a conjugada da implicação de Yager intervalar é também uma implicação fuzzy intervalar.

Proposição 98. *Seja* Φ *um automorfismo e* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *a conjugada de* $\mathbb{I}_Y$*. Para cada* $k \in K = \{2,3,4,5,9,12,13,19,20,21\}$*,* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}\mathbf{K}$ *se, e somente se,a* Φ*-conjugada* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *também satisfaz* $\mathbb{I}\mathbf{K}$.

Prova. *(⇒) Considerando* $\mathbb{I}_Y$ *a implicação de Yager intervalar , definida pela Eq. (8.5). Logo,*

$\mathbb{I}\mathbf{2}$ *Se* $X \leq Z$ *então* $\Phi(X) \leq \Phi(Z)$ *logo,* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}\mathbf{2}$*,* $\mathbb{I}_Y(\Phi(X),\Phi(Y)) \geq \mathbb{I}_Y(\Phi(Z),\Phi(Y))$. *Desde que* Φ *seja uma função contínua e estritamente crescente que satisfaça as condições de contorno.* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Y) = \Phi^{-1}(I(\Phi(X),\Phi(Y)))) \geq \Phi^{-1}(I(\Phi(Z),\Phi(Y))) = \mathbb{I}_Y^{\Phi}(Z,Y)$.

$\mathbb{I}\mathbf{3}$ *Se* $Y \leq Z$ *então* $\Phi(Y) \leq \Phi(Z)$ *logo,* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}\mathbf{3}$*,* $\mathbb{I}_Y(\Phi(X),\Phi(Y)) \leq \mathbb{I}_Y(\Phi(X),\Phi(Z))$. *Portanto,* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Y) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X),\Phi(Y)))) \leq \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X),\Phi(Z))) = \mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Z)$.

$\mathbb{I}\mathbf{4}$ *Se* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}\mathbf{4}$*,* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}([1,1],Y) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(1),\Phi(Y)))) = \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(1,\Phi(Y)))) = \Phi^{-1}(\Phi(Y)) = Y$.

$\mathbb{I}\mathbf{5}$ *Considerando que* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}\mathbf{5}$*, tem-se*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,\mathbb{I}_Y^{\Phi}(Y,Z)) &= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X),\Phi(I_{\mathbb{T}}^{\Phi}(Y,Z))))) \quad \textit{pela Eq. 6.10, Proposição 65}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X),\mathbb{I}_Y(\Phi(Y),\Phi(Z)))) \quad \textit{pela Eq. 6.10, Proposição 65}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(Y),\mathbb{I}_Y(\Phi(X),\Phi(Z)))), \quad \textit{pela propriedade } \mathbb{I}\mathbf{17}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(Y),(\Phi(\Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X),\Phi(Z)))))), \quad \textit{pela Eq. 6.10, Proposição 65}\\
&= \mathbb{I}_Y^{\Phi}(Y,\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Z)), \quad \textit{pela Eq. 6.10, Proposição 65}
\end{aligned}$$

$\mathbb{I}\mathbf{9}$ *Se* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}\mathbf{9}$ *então* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,[1,1]) = \Phi^{-1}(I(\Phi(X),\Phi([1,1])))) = \Phi^{-1}(I(\Phi(X),[1,1]))) = \Phi^{-1}([1,1]) = [1,1]$.

$\mathbb{I}\mathbf{12}$ *Se* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}\mathbf{7}$ *então* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}([0,0],Y) = \Phi^{-1}(I(\Phi([0,0]),\Phi(Y)))) = \Phi^{-1}(I([0,0],\Phi(Y)))) = \Phi^{-1}([1,1]) = [1,1]$. *Assim,* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *verifica a propriedade da dominância da falsidade, e* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *satisfaz a propriedade da dominância da verdade do consequente.*

$\mathbb{I}\mathbf{13}$ *: Se* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz a propriedade* $\mathbb{I}\mathbf{3}$ *e supondo* $Y \geq 0$*, então* $\mathbb{I}^{\Phi}(X,Y) \geq \mathbb{I}^{\Phi}(X,[0,0]) = \mathbb{N}_{\mathbb{I}}^{\Phi}(X,[0,0])$.

$\mathbb{I}$**19** *Considerando que* $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}$**19** *sempre que* $\mathbb{T}(X,Y) = X \cdot Y$ *então*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X, \mathbb{T}^{\Phi}(Y,Z)) &= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(\mathbb{T}^{\Phi}(Y,Z)))) \quad \textit{pela Eq. 6.10,Proposição 65}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \mathbb{T}(\Phi(Y), \Phi(Z)))) \quad \textit{pela Eq. 6.10, Eq. 3.13}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{T}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(Y)), \mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(Z)))) \quad \textit{pela propriedade } \mathbb{I}\mathbf{8}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{T}((\Phi \circ \Phi^{-1})\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(Y)), (\Phi \circ \Phi^{-1})\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(Z)) \quad \textit{pela Eq. 3.13}\\
&= \mathbb{T}^{\Phi}(\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Y), \mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Z)) \quad \textit{pela propriedade } \mathbb{I}\mathbf{8} \quad \textit{e} \quad \textit{Eq. 6.10}
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$*também satisfaz* $\mathbb{I}$**8**.

$\mathbb{I}$**20** *Se* $\mathbb{I}_Y$ *é uma implicação fuzzy que satisfaz* $\mathbb{I}$**20**, *então*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_Y^{\Phi}(\mathbb{T}^{\Phi}(X,Y), Z) &= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\phi(\mathbb{T}^{\Phi}(X,Y), \Phi(Z)))) \quad \textit{pela Eq. 6.10, Proposição 65}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\mathbb{T}(\Phi(X), \Phi(Y)), \Phi(Z))) \quad \textit{pela Eq. 6.10, Eq. 3.13}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \mathbb{I}_Y(\Phi(Y), \Phi(Z)))) \quad \textit{pela propriedade } \mathbb{I}\mathbf{9}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(\mathbb{I}_Y^{\Phi}(Y,Z)))) \quad \textit{pela Eq. 6.10} \quad \textit{e} \quad \textit{Eq. 3.13}\\
&= \mathbb{I}_Y^{\Phi}(X, \mathbb{I}_Y^{\Phi}(Y,Z)) \quad \textit{pela Eq. 3.12}
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *também satisfaz o princípio da troca.*

$\mathbb{I}$**21** *Supondo* $\mathbb{I}_Y$ *uma implicação fuzzy intervalar que satisfaz* $\mathbb{I}$**21**, *assim*

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}^{\Phi}(\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Y), \mathbb{I}_Y^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X),Y)) &= \Phi^{-1}(\mathbb{T}(\Phi(\mathbb{I}_Y^{\Phi}(X,Y)), \Phi(\mathbb{I}_Y^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X),Z)))) \quad \textit{pela Eq. 3.13, Proposição 65}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{T}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(Y)), \mathbb{I}_Y(\Phi(\mathbb{N}^{\Phi}(X)), \Phi(Z)))) \quad \textit{pela Eq. 6.10}\\
&= \Phi^{-1}(\mathbb{T}(\mathbb{I}_Y(\Phi(X), \Phi(Y)), \mathbb{I}_Y(\mathbb{N}(\Phi(X)), \Phi(Z)))) \quad \textit{pela Eq. 6.11}\\
&= \Phi^{-1}(Y), \Phi(Z))) = 1 \quad \textit{pela propriedade } \mathbb{I}\mathbf{10} \quad \textit{e} \quad \textit{Eq. 6.10}
\end{aligned}$$

portanto, conclui-se que $\mathbb{T}^{\Phi}(I_Y^{\Phi}(X,Y), \mathbb{I}_Y^{\Phi}(\mathbb{N}^{\Phi}(X),Y)) = Y$.

Assim, quando $\mathbb{I}_Y$ *satisfaz* $\mathbb{I}$**K**, *a sua conjugada* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *também satisfaz* $\mathbb{I}$**K**.
(⇐) A prova inversa pode ser obtida de maneira análoga.

Corolário 15. $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *não é uma S-implicação intervalar, nem QL-implicação intervalar e nem uma R-implicação intervalar.*

Prova. *Isto é consequência das Proposições 23, 32, 35 e 51.*

Proposição 99. *A implicação de Yager intervalar* $\mathbb{I}_Y$ *a* Φ*-conjugada intervalar* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *são A-implicações intervalares.*

Prova. *Baseado-se na Proposição 44, na Proposição 96 e no Corolário 14,* $\mathbb{I}_Y$ *é uma A-implicação intervalar. Além disso, pela Proposição 44, Proposição 98 e Corolário 15* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *é também uma A-implicação intervalar.*

Exemplo 9. *De acordo com o Exemplo 4, tem-se* $\Phi(X) = X^n$. *Portanto* $\mathbb{I}_Y^{\Phi}$ *e* $\mathbb{I}_{Y^n}^{\Phi}$ *formam um par de funções conjugadas.*

De acordo com o Teorema 8, juntamente com a Proposição 93, verifica-se a comutatividade do diagrama na Fig. 8.1.Neste diagrama, $C(I_Y)$ indica a classe da implicação de Yager, $C(I_Y^{\phi})$ indica a classe da ϕ-conjugada da implicação de Yager. As extensões intervalares relacionadas são indicadas por $C(\mathbb{I}_Y)$ e $C(\mathbb{I}_Y^{\Phi})$, respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
C(I_Y) \arrow[r, "Eq.(8.6)"] \arrow[d, "Eq.(5.6)"'] & C(\mathbb{I}_Y) \arrow[d, "Eq.(8.7)"] \\
C(I_Y^{\phi}) \arrow[r, "{Eq.(6.8), Eq.(6.9)}"] & C(\mathbb{I}_Y^{\Phi})
\end{tikzcd}$$

Figura 8.1: Comutatividade das classes obtidas a partir de Implicação de Yager.

8.3 $\mathbb{G}_h$-implicações Fuzzy Intervalares

Nesta seção, será apresentado uma das principais contribuições deste trabalho, a extensão intervalar da $\mathbb{G}_h$-implicações fuzzy e da Φ-conjugada da $\mathbb{G}_h$-implicação fuzzy.

Além disso, será desenvolvida uma análise contemplando a versão intervalar das propriedades da $\mathbb{G}_h$-implicações fuzzy já estudadas na Seção 5.3.

Também está incluída nesta análise, na Seção 8.3.1, o estudo da ação de automorfismos intervalares relacionado com a Φ-conjugada da implicação valorada intervalarmente $\mathbb{G}_h$, fundamentada nas considerações discutidas anteriormente, referentes à Seção 5.3.1.

Definição 28. *Sejam $\mathbb{N}_C$ a negação intervalar padrão, $\mathbb{T}_P$ a t-norma intervalar do produto e $\mathbb{S}_M$ a t-conorma intervalar do máximo. Considere também a função **sg** : $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$, onde*

$$\boldsymbol{sg}(X) = \begin{cases} [1,1], & se\ X > [0,0]; \\ [0,0], & c.c. \end{cases} \tag{8.8}$$

A função $\mathbb{G}_h : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ definida pela expressão:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{N}_C,\mathbb{S},\mathbb{T}}(X,Y) = \mathbb{G}_h(X,Y) = (\mathbb{N}_C(\boldsymbol{sg}(X-Y)) \cdot \mathbb{S}_M(\mathbb{T}_M(\mathbb{N}(Y), \mathbb{N}(X)), Y)), \tag{8.9}$$

é uma classe de implicações fuzzy intervalares.

A função $\mathbb{G}_h$ definida pela Eq. (8.9), pode ser expressa por:

$$\mathbb{G}_h(X,Y) = ([1,1] - \mathbf{sg}(X-Y)) \cdot \max([1,1] - \max(X,Y), Y).$$

Observe que, se $X \leq Y$ então $[1,1] - X \geq [1,1] - Y$, e portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_h(X,Y) &= ([1,1] - \mathbf{sg}(X-Y)) \cdot \max(\min([1,1]-X, [1,1]-Y), Y) \\ &= ([1,1] - \mathbf{sg}(X-Y)) \cdot \max([1,1]-Y, Y)) \end{aligned}$$

Caso contrário, se $X > Y$, então $\mathbb{G}_h(X,Y) = [0,0]$.

Proposição 100. *Seja **sg** a função dada pela Eq. 8.8. A função $\mathbb{G}_h : \mathbb{U}^2 \to \mathbb{U}$ definida pela expressão:*

$$\mathbb{G}_h(X,Y) = ([1,1] - \boldsymbol{sg}(X-Y)) \cdot \max([1,1]-Y, Y) \tag{8.10}$$

é uma implicação fuzzy.

Prova.

$$\mathbb{G}_h(X,Y) = ([0,0],[0,0]) = [1,1];$$
$$\mathbb{G}_h(X,Y) = ([0,0],[1,1]) = [1,1];$$
$$\mathbb{G}_h(X,Y) = ([1,1],[0,0]) = [0,0];$$
$$\mathbb{G}_h(X,Y) = ([1,1],[1,1]) = [1,1].$$

Teorema 19. *Sejam $\mathbb{N}_\mathbb{C}$ a negação intervalar padrão, $\mathbb{S}_\mathbb{M}$ a t-conorma intervalar do máximo e $\mathbb{T}_\mathbb{P}$ a t-norma intervalar do produto. Então, a representação canônica da implicação G_h é obtida da seguinte forma:*

$$\widehat{I_{G_h}}(X,Y) = \mathbb{I}_{G_h}(X,Y). \tag{8.11}$$

Prova. *Segue da Definição 8, Proposições 60 e 61 e Teorema 2 que:*

$$\widehat{I_{G_h}}(X,Y) = \widehat{I}_{\widehat{N_C},\widehat{S_M},\widehat{T_P}}(X,Y) = \mathbb{I}_{\mathbb{N}_\mathbb{C},\mathbb{S}_\mathbb{M},\mathbb{T}_\mathbb{P}}(X,Y).$$

Proposição 101. *A função $\mathbb{G}_h$, dada pela Eq. (8.9), satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mathbb{I}$**2**, *para todo $X, Y, X \in U$;*

(ii) $\mathbb{I}$**3** *se $0.5 \leq Y$;*

(iii) $\mathbb{I}$**5** *se $0.5 \leq X, Y$;*

(iv) *se $0.5 \leq X, Y$ então $\mathbb{G}_h(X,Y) \geq \mathbb{G}_h(\mathbb{N}(Y), \mathbb{N}(X))$;*

(v) *$\mathbb{G}_h$ é contínua.*

Prova. *Apresenta-se a prova de (**i**), as demais podem ser construídas de forma análoga. Se $X \leq Y$ então $X - Z \geq Y - Z$ e $\boldsymbol{sg}(X - Z) \geq \boldsymbol{sg}(Y - Z)$. Além disso, se $X \leq Y$ então $\mathbb{S}_\mathbb{M}(\mathbb{T}_\mathbb{M}(\mathbb{N}(X), \mathbb{N}(Z)), Z) \geq \mathbb{S}_\mathbb{M}(\mathbb{T}_\mathbb{M}(\mathbb{N}(Y), \mathbb{N}(Z)), Z)$. Portanto, se $X \leq Y$ então $\mathbb{G}_h(X,Z) \geq \mathbb{G}_h(Y,Z)$.*

Proposição 102. *A função $\mathbb{G}_h$, dada pela Eq. (8.9), satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mathbb{I}$**19** *quando $0.5 \leq X \leq Y, Z \leq Z$;*

(ii) $\mathbb{I}$**11** *quando $X \geq Y$;*

(iii) $\mathbb{I}$**21** *quando $S(X, \mathbb{N}(X)) \leq Y$;*

(iv) $\mathbb{I}$**22***quando $Y \in [0.5, 1]$;*

(v) $\mathbb{I}$**20** *quando $X, Y \leq Z$;*

Prova. *Segue do Teorema 19, Proposição 100 e Definição 28.*

8.3.1 Φ-conjugada da $\mathbb{G}_h$-implicação Fuzzy Intervalar

Proposição 103. *Seja Φ um automorfismo intervalar e $\mathbb{G}_h$ a função G_h valorada intervalarmente. A função conjugada $\mathbb{G}_h^{\Phi}$ de $\mathbb{G}_h$ dada pela equação*

$$\mathbb{G}_h^{\Phi} = \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h(\Phi(X), \Phi(Y))) \tag{8.12}$$

é também uma implicação fuzzy intervalar.

Prova. *Considerando uma $\mathbb{G}_h$-implicação fuzzy intervalar, cuja definição é dada pela Eq. (8.9), segundo a Proposição 100, tem-se que $\mathbb{G}_h$ satisfaz $\mathbb{I}\mathbf{1}$:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_h^{\Phi}([0,0],[0,0]) &= \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h(\Phi([0,0]),\Phi([0,0]))) = \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h([0,0],[0,0])) = [1,1];\\
\mathbb{G}_h^{\Phi}([0,0],[1,1]) &= \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h(\Phi([0,0]),\Phi([1,1]))) = \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h([0,0],[1,1])) = [1,1];\\
\mathbb{G}_h^{\Phi}([1,1],[1,1]) &= \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h(\Phi([1,1]),\Phi([1,1]))) = \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h([1,1],[1,1])) = [1,1];\\
\mathbb{G}_h^{\Phi}([1,1],[0,0]) &= \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h(\Phi([1,1]),\Phi([0,0]))) = \Phi^{-1}(\mathbb{G}_h([1,1],[0,0])) = [0,0].
\end{aligned}$$

Assim, a conjugada de uma $\mathbb{G}_h$-implicação fuzzy intervalar é também uma implicação fuzzy intervalar.

Proposição 104. *Sejam $\mathbb{N}_{\mathbb{C}}$ a negação intervalar padrão, $\mathbb{S}_{\mathbb{M}}$ a t-conorma intervalar do máximo, $\mathbb{T}_{\mathbb{P}}$ a t-norma intervalar do produto e $\mathbb{I}_{G_h}$ uma implicação G_h valorada intervalarmente. Supondo ainda que Φ é o automorfismo intervalar obtido a partir de um automorfismo ϕ, então, tem-se que a representação canônica da conjugada da implicação G_h, indicada pela expressão $\widehat{I_{G_h}^{\phi}}$ é obtida da seguinte forma:*

$$\widehat{I_{G_h}^{\phi}}(X,Y) = \mathbb{I}_{G_h}^{\Phi}(X,Y). \tag{8.13}$$

Prova. *Segue das Proposição 19 e Teorema 4 que:*

$$\widehat{I_{G_h}^{\phi}}(X,Y) = \widehat{I^{\phi}_{\widehat{N_C},\widehat{S_M},\widehat{T_P}}}(X,Y) = \mathbb{I}^{\Phi}_{\mathbb{N}_{\mathbb{C}},\mathbb{S}_{\mathbb{M}},\mathbb{T}_{\mathbb{P}}}(X,Y).$$

Proposição 105. *A conjugada da função $\mathbb{G}_h$ dada pela Eq. (8.12), satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mathbb{I}\mathbf{2}$*, para todo $X, Y, X \in U$;*

(ii) $\mathbb{I}\mathbf{3}$ *se $0.5 \leq Y$;*

(iii) $\mathbb{I}\mathbf{5}$ *se $0.5 \leq X, Y$;*

(iv) *se $0.5 \leq X, Y$ então $\mathbb{G}_h(X,Y) \geq \mathbb{G}_h(\mathbb{N}(Y), \mathbb{N}(X))$;*

(v) *$\mathbb{G}_h$ é contínua;*

se, e somente se, a função $\mathbb{G}_h$, dada pela expressão Eq. (8.10) satisfaz estas propriedades.

Prova. *Segue das Proposições 104 e 101 e Definição 28.*

Proposição 106. *A função conjugada de $\mathbb{G}_h$, dada pela Eq. (8.12), satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mathbb{I}$**19** *quando* $0.5 \leq X \leq Y, Z \leq Z$*;*

(ii) $\mathbb{I}$**11** *quando* $X \geq Y$*;*

(iii) $\mathbb{I}$**21***quando* $S(X, \mathbb{N}(X)) \leq Y$*;*

(iv) $\mathbb{I}$**22** *quando* $Y \in [0.5, 1]$*;*

(v) $\mathbb{I}$**20** *quando* $X, Y \leq Z$*;*

se, e somente se, a função $\mathbb{G}_h$*, dada pela Eq. (8.9), também satisfaz estas propriedades.*

Prova. *Segue das Proposições 104 e 105 e Definição 28.*

Proposição 107. *A implicação* $\mathbb{G}_h$ *intervalar e suas implicações intervalares conjugadas são A-implicações intervalares.*

Denota-se por $C(G_h)$ a classe das G_h implicações fuzzy e $C(G_h^{\phi})$ a classe das funções conjugadas de implicações fuzzy G_h. As extensões intervalares relacionadas são indicadas por $C(\mathbb{G}_h)$, e $C(\mathbb{G}_h^{\Phi})$, respectivamente. De acordo com o Teorema 8, juntamente com a Proposição 103, este trabalho mostrou que a comutatividade do diagrama na Figura 8.2 é verificada.

$$\begin{tikzcd}
C(G_h) \arrow[r, "Eq.(8.9)"] \arrow[d, "Eq.(??)"'] & C(\mathbb{G}_h) \arrow[d, "Eq.(8.13)"] \\
C(G_h^{\phi}) \arrow[r, "{Eq.(6.8), Eq.(6.9)}"] & C(\mathbb{G}_h^{\Phi})
\end{tikzcd}$$

Figura 8.2: Comutatividade da classe das G_h Implicações Fuzzy.

8.4 Considerações Finais

Neste capítulo considerou-se a avaliação de propriedades algébricas verificadas pela extensão intervalar das subclasses de A-implicações: $\mathbb{I}_Y$ implicações de Yager intervalar e das $\mathbb{G}_h$-implicações fuzzy intervalares.

Analisou-se também, a ação de automorfismos nessas duas subclasses das implicações de Yager intervalar e das $\mathbb{G}_h$-implicações fuzzy intervalares.

9 CONCLUSÃO

O trabalho desenvolvido mostra que na lógica fuzzy valorada intervalarmente também se pode construir proposições utilizando-se diferentes operadores, gerando novas proposições fuzzy valoradas intervalarmente, incluindo os conectivos como t-normas, t-conormas e negações fuzzy valoradas intervalarmente, bem como os operadores de implicação fuzzy intervalares.

As proposições fuzzy valoradas intervalarmente resultantes das combinações de funções de agregação podem ser descritas em termos de relações da lógica fuzzy valorada intervalarmente e a determinação do valor destas relações ocorrem em função dos conjuntos fuzzy dos operandos, os quais podem ser definidos de muitas maneiras diferentes.

Existem muitas formas de estender os conectivos proposicionais clássicos para o conjunto $\mathbb{U}$. Neste estudo, a representação canônica intervalar consiste num operador cujas extensões preservam tanto as propriedades lógicas dos conectivos da lógica fuzzy como os critérios de optimalidade e corretude da análise numérica sobre intervalos de reais.

9.1 Principais Contribuições

Na sua fundamentação, o texto colaborou com a discussão e o estudo dos seguintes temas:

(i) A integração entre a Matemática Intervalar e a Lógica Fuzzy vem consolidando a Lógica Fuzzy Intervalar, cujas principais caracterizações e aplicações são descrita no Capítulo 2. Neste contexto, buscou-se a fundamentação para compreensão desde a modelagem do tratamento da incerteza até a estruturação dos processos computacionais que ocorrem no sistema de inferência e regras aplicadas, quando da execução de sistemas especialistas. Estes sistemas, conforme descrição apresentada, auxiliam na simulação de sistemas reais e complexos, que visam colaborar, pelo uso de um ferramenta computacional, para tomada de decisões. Para tal, também foram discutidos a evolução da Matemática intervalar e sua contextualização na Computação Científica, assim como revisados os princípios da Aritmética Intervalar, com ênfase nas operações aritméticas e transcendentes e, nas noções de representação intervalar.

(ii) Na teoria de conjuntos fuzzy, as normas, conormas têm um papel fundamental para fornecer os modelos genéricos para as operações de intersecção e união, devendo possuir as propriedades de comutatividade, associatividade, monotonicidade e satisfazer o elemento neutro. Analogamente, para construção da noção de dualidade considera-se a relevância do complemento fuzzy. A generalização dos conectivos proposicionais clássicos utilizando os conceitos de normas triangulares, conormas triangulares e de negação fuzzy são estudados no Capítulo 3, e fundamentaram a correspondente extensão baseada na representação canônica apresentada, na sequência, no Capítulo 6.

(iii) As funções de agregação intervalares formam classes gerais de intersecção e união respectivamente caracterizadas por normas triangulares intervalares e por conormas triangulares intervalares e juntamente com o complemento fuzzy podem ser estendidas considerando a representação canônica. Este texto resume os principais resultados, apresenta uma análise de propriedades e exemplos dos agregadores e da negação fuzzy valorados intervalarmente, os quais foram detalhados no Capítulo 6.

(iv) O trabalho ainda contemplou, no Capítulo 4 uma revisão bibliográfica visando a identificação e análise dos principais implicações fuzzy, suas principais propriedades e as correspondentes aplicações dentro do estudo estrito da lógica fuzzy. Esta etapa de desenvolvimento colaborou com o fortalecimento e integração entre os grupos de pesquisa GMFC/PPGINF/UCPEL e Lolita/UFRN, considerando a importância de revisão de todos os trabalhos já consolidados por estes grupos no estudo de implicações e coimplicações, dentro da lógica fuzzy e da lógica fuzzy valorada intervalarmente.

(v) Considerando a importância de implicações fuzzy no desenvolvimento de aplicações práticas em sistemas fuzzy, uma importante contribuição deste trabalho foi o estudo da representação canônica intervalar para diferentes classes de implicações (QL-implicações, S-implicações, R-implicações e D-implicações) valoradas intervalarmente e de suas principais propriedades, com base nas extensões intervalares de operadores de agregação e complemento fuzzy. Este estudo de propriedades algébricas das implicações fuzzy intervalares foi baseada em dois tipos de abordagens:

1. na representação explícita, definida em termos dos operadores de agregação, como verifica-se no caso das S-implicações, QL-implicações e D-implicações valoradas intervalarmente; ou
2. na representação implícita, pelo estudo da importante classe de R-implicações valoradas intervalarmente.

Consolidada esta etapa de embasamento teórico, a principal colaboração deste trabalho está no estudo das operações de implicação fuzzy que não podem ser naturalmente representadas na forma explícita ou na forma implícita. Neste sentido, foram obtidos os seguintes resultados, descritos no Capítulo 8:

(i) Axiomatização da extensão intervalar baseada no construtor canônico para a classe de A-implicações incluindo estudo e análise de suas propriedades;

(ii) Extensão da representação intervalar no sentido de investigar a subclasse das implicações de Yager e a subclasse das G_h-implicações fuzzy;

(iii) Estudo e formalização da ação de automorfismos sobre a classe de A-implicações e das subclasse das implicações de Yager e a subclasse das G_h-implicações fuzzy, incluindo alguns aspectos relacionados com a relação de dualidade;

(iv) Análise da ação de automorfismos intervalares e preservação de propriedades das A-implicações e A-implicações valoradas intervalarmente, incluindo suas principais subclasses, como as implicações de Yager intervalares e as $\mathbb{G}_h$-implicações intervalares, levando-se em consideração neste caso, a representação canônica intervalar.

9.2 Publicações dos Resultados

Durante este estudo foram publicados os seguintes trabalhos:

- Introdução ao Estudo das Implicações Fuzzy Valoradas Intervalarmente, Marília do Amaral Dias. In: XVIII Congresso de Iniciação Científica, VIII Mostra de Pós-Graduação, Congresso de Extensão, UCPel, 2009.

- A-Implicação Fuzzy Valoradas Intervalarmente, Marília do Amaral Dias, Renata Hax Sander Reiser , Benjamin Calejas Bedregal, In: XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2010, São Carlos. CNMAC 2010, 2010.

- On Interval Valued Fuzzy Logic: The Best Interval Representation of the Yager's Implication. Renata Hax Sander Reiser, Benjamin Calejas Bedregal, Regivan Santiago, Marília do Amaral Dias. In: REISER, R, H. S.; PILLA, M. L.. (Org.). IntMath-TSD: Interval Mathematics and Connections in Teaching and Scientific Development: Minisymposium Selection: Celebrating 30 Years of Interval Mathematics in Brazil. 1 ed. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas. Editora Universitária, 2010, v. 1, p. 155-167. Renata Hax Sander Reiser, Benjamin Calejas Bedregal, Regivan Santiago, Marília do Amaral Dias.

  Trabalhos submetidos à publicação:

- On Yager's implications and their conjugates, Renata H. S. Reiser, Benjamin C. Bedregal, Regivan H.N.Santiago, Marília A.Dias In: Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, 2010, Sorocaba-SP.

- A-Implicações Fuzzy Valoradas Intervalarmente, Marília do Amaral Dias, In: Salão Universitário: XIX Congresso de Iniciação Científica,IX Mostra de Pós-Graduação, II Congresso de Extensão, UCPel, 2010.

9.3 Continuidade do Trabalho

Com base nos resultados obtidos neste trabalhos, novas propostas se estruturam. Assim, na continuidade deste trabalho o foco principal continua sendo contribuir para o estudo da axiomatização das implicações fuzzy valoradas intervalarmente. Mais especificamente, tem-se as seguintes possibilidades de investigação teórica nesta linha de pesquisa:

- Estudo, modelagem e construção da extensão intervalar de outras subclasses de implicações fuzzy da classe de A-implicações, incluindo avaliação da ação de automorfismo e relações de dualidade, incluindo as A-coimplicações valoradas intervalarmente;
- Avaliações das propriedades algébricas verificadas pelas subclasses e construções duais;
- Estudo e análise da ação de geradores aditivos e multiplicativos sobre A-(co)implicações fuzzy e A-(co)implicações fuzzy valoradas intervalarmente;
- Definição de construtores menos restritivos que os automorfismos, para geração de novos conectivos fuzzy intervalares, como os operadores de retração;
- Investigação das condições que garantem a dualidade em construções contrapositivas na axiomatização das implicações fuzzy e extensão intervalar correspondente.

REFERÊNCIAS

ACIóLY, B. M.; BEDREGAL, B. C. A Quasi-Metric Topology Compatible with Inclusion Monotonicity on Interval Space. **Reliable Computing**, [S.l.], v.3, n.3, p.305–313, 1997.

ACIÓLY, B. M. **Computational foundations of Interval mathematics**. 1991. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — PGCC/UFRGS, Porto Alegre. (in Portuguese).

ACZEL, J. **Lectures on Funcional Equations and Their Applications**. [S.l.]: New York:Academis Press, 1996.

ALEFELD, G.; FROMMER, A.; LANG, B. **Scientific Computing and Validated Numerics**: Proceedings of the International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Wuppertal, 1995. Berlin: AkademieVerlag, 1996. (Mathematical Research, v.90).

ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. **Introduction to Interval Computations**. New York: Academic Press, 1983.

ALSINA, C.; TRILLAS, E.; VALVERDE, L. On non-distributive logical connectives for fuzzy set theory. **Busefal**, [S.l.], v.3, p.18–29, 1980.

ANGUELOV, R.; MARKOV, S.; SENDOV, B. The set of Hausdorff continuous functions – The largest linear space of interval functions. **Reliable Computing**, [S.l.], v.12, n.5, p.337–363, 2006.

BACZYNSK, M.; JAYARAM, B. (U,N)-implications and their characterizations. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.14, p.2049–2062, 2009.

BACZYNSKI, M. Residual Implications Revisited. Notes on the Smets-Magrez. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.145, n.2, p.267–277, 2004.

BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. (S,N)- and R-implications: A state-of-the-art survey. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.14, p.1836–1859, 2008.

BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. **Fuzzy Implications**. [S.l.]: Berlin-Heildelberg: Springer, 2008.

BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. (U,N)-implications an their characterizations. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, p.2044–2062, 2009.

BACZYNSKI, M.; JAYARAN, B. On the characterization of (S,N)-implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.158, n.15, p.1713–1727, 2007.

BAETS, B. Coimplicators, The Forgotten Connectives. **Tatra Mountains Mathematical Publications**, [S.l.], p.229–240, 1997.

BALASUBRAMANIAM, J. Contrapositive symmetrisation of fuzzy implications Revisited. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.157, n.17, p.2291–2310, 2006.

IMECC (Ed.). **Sistemas fuzzy e aproximação universal, Tese de Mestrado**. [S.l.]: Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2002.

BARBOZA, L. V.; DIMURO, G. P.; REISER, R. H. S. Towards Interval Analysis of the Load Uncertainty in Power Electric Systems. In: **Proceedings of the 8th International Conference on Probability Methods Applied to Power Systems, Ames, 2004**. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2004. p.538–541.

BARROS, L.; BASSANEZI, R. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. [S.l.]: Campinas, São Paulo, 2006.

B.C. BEDREGAL, G. P. D.; REISER, R. H. S. An approach to interval-valued R-implications and automorphisms. **Proceedings of International Fuzzy Systems Association World Congress/European Society for Fuzzy Logic and Technology Conference,Lisboa,**, [S.l.], p.1–6, 2009. IFSA/EUSFLAT.

BEDREGAL, B. A normal form which preserves tautologies and contradictions in a class of fuzzy logics. **Journal of Algorithms**, [S.l.], 2007. doi: 10.1016/J.Algor.2007.04.003.

BEDREGAL, B. On Interval Fuzzy Negations. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.161, p.2290–2313, 2010.

BEDREGAL, B. C. **On Interval Fuzzy Negations**. [S.l.]: DIMAP/UFRN, 2009. (available at http://www.dimap.ufrn.br/ bedregal/main-publications.html).

BEDREGAL, B. C.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. Xor-Implications and E-Implications: Classes of Fuzzy Implications Based on Fuzzy Xor. **Electr. Notes Theor. Comput. Sci**, [S.l.], v.247, p.5–18, 2009.

BEDREGAL, B. C.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. An Approach to interval-valued R-implication and Automorphisms. **IFSA World Congres– Instituto Superior Técnico, EUSFLAT Conference, Lisboa**, [S.l.], p.1–6, 2009.

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N. Characterizing and Specifying Optimal and Correct Interval Functions. **Formal Aspects of Computing**, [S.l.], 2007. (Submitted).

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; DIMURO, G. P.; REISER, R. H. S. Interval Valued R-Implications and Automorphisms. In: **Pre-Proceedings of the 2nd Workshop on Logical and Semantic Frameworks, with Applications**. Ouro Preto: UFMG, 2007. p.82–97.

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. Properties of fuzzy implications obtained via the interval constructor. **TEMA – Tendencies in Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], v.8, n.1, p.33–42, 2007. available at http://www.sbmac.org.br/tema.

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. The Best Interval Representation of Fuzzy S-Implications and Automorphisms. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, LONDRES, 2007, 2007, Los Alamitos. **Proceedings...** IEEE, 2007. p.3220–3230.

BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. Analyzing Properties of Fuzzy Implications Obtained via the Interval Constructor. In: **12th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, 26-29 September, Duisburg, 2006, SCAN 2006 Conference Post-Proceedings**. Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2007. n.13.

BEDREGAL, B. C.; TAKAHASHI, A. The Best Interval Representation of T-Norms and Automorphisms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.157, n.24, p.3220–3230, 2006.

BEDREGAL, B. C.; TAKAHASHI, A. Interval Valued Versions of T-Conorms, Fuzzy Negations and Fuzzy Implications. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, VANCOUVER, 2006, 2006, Los Alamitos. **Proceedings...** IEEE, 2006. p.1981–1987.

BEDREGAL, B. C.; TAKAHASHI, A. Interval Representations of N-dual t-conorm. In: CONGRESS ON LOGIC APPLIED TO TECNOLOGY, LAPTEC'07, 6., 2007, Santos. **Proceedings...** Unisanta, 2007. p.1–8.

BEDREGAL, B.; DIMURO, G.; SANTIAGO, R.; REISER, R. On interval fuzzy S-implications. **Information Science**, [S.l.], v.180, p.1373–1389, 2010.

BEDREGAL, B. R. C.; DIMURO, G. P.; REISER, R. H. S. An Approach to Interval-Valued R-Implications and Automorphisms. In: INTERNATION FUZZY SYSTEMS ASSOCIATION WORLD CONGRESS/EUROPEAN SOCIETY FOR FUZZY LOGIC AND TECHNONOLY CONFERENCE, 2009, Lisboa. **Proceedings...** IFSA/EUSFLAT, 2009. (to appear).

BEDREGAL, B. R. C.; REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P. Xor-Implications and E-Implications: Classes of fuzzy implications based on fuzzy Xor. In: BENEVIDES, M.; PIMENTEL, E. (Ed.). **Proceedings of the Third Workshop on Logical and Semantic Frameworks, with Applications, Salvador, 2008**. Amsterdam: Elsevier, 2009. (Electronic Notes in Theoretical Computer Science). (to appear).

BOJADZIEV, G.; BOJADZIEV, M. **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Aplications**. [S.l.]: World scientific, 1995. v.5.

BUSTINCE, H.; BARRENECHEAA, E.; PAGOLAA, M.; FERNANDEZ, J. Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.13, p.1819–1840, 2009.

BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphism, Negations and Implication Operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.134, n.2, p.209–229, 2003.

BUTINARIU, D.; E.P., K. **Triangular Norm-Based Measures and games With Fuzzy Coalitions**. [S.l.]: Klumer Academic Publishers,Dordrecht, 1993.

CAPRANI, O.; MADSEN, K.; STAUNING, O. Existence Test for Asynchronous Interval Iteration. **Reliable Computing**, [S.l.], v.3, n.3, p.269–275, 1997.

CARLSSON, C.; FULLER, R. **Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization**. Heidelberg: Physiva-Verlag Springer, 2002.

GEEM (Ed.). **Introdução à Lógica Matemática**. 6.ed. [S.l.]: São Paulp:GEEM, 1984. v.1.

CHEN, G.; PHAM, T. T. **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems**. Boca Raton: CRC Press, 2001.

CLAUDIO, D. M.; MARINS, J. M. **Cálculo Numérico Computacional**:Teoria e Prática. [S.l.]: São Paulo:Altas S.A., 1989. v.1.

DESCHRIJVER, G. Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.14, p.2906–2924, 2007.

DESCHRIJVER, G. A representation of t-norms in interval-valued L-fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.13, p.1597–1618, 2008.

DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.153, n.2, p.229–248, 2005.

DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B. R. C.; REISER, R. H. S.; SANTIAGO, R. H. N. Interval Additive Generators of Interval T-Norms. In: HODGES, W.; QUEIROZ, R. de (Ed.). **Proceedings of the 15th International Workshop on Logic, Language, Information and Computation, WoLLIC 2008, Edinburgh**. Berlin: Springer, 2008. n.5110, p.123–135. (LNAI).

DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. Interval-based Markov Decision Processes for Regulating Interactions Between Two Agents in Multi-Agent Systems. In: SELECTED PAPERS OF THE 7TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED PARALLEL COMPUTING, PARA'04, LYNGBY, 2006, Berlin. **Anais...** Springer, 2006. n.3732, p.102–111. (LNCS).

DUBOIS, D.; PRADE, H. Random sets and fuzzy interval analysis. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.42, n.1, p.87–101, 1991.

DUBOIS, D.; PRADE, H. **Fuzzy Sets and Systems**. New York: Academic Press, 1996.

DUBOIS, D.; PRADE, H. Interval-valued Fuzzy Sets, Possibility Theory and Imprecise Probability. In: JOINT 4TH CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR FUZZY LOGIC AND TECHNOLOGY AND THE 11TH RENCONTRES FRANCOPHONES SUR LA LOGIQUE FLOUE ET SES APPLICATIONS, 2005, Barcelona. **Proceedings...** Universidad Polytecnica de Catalunya, 2005. p.314–319.

DUBOIS, D.; PRADE, H.; SESSA, S. Recent Literature: Collected by Didier Dubois, Henri Prade and Salvatore Sessa. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.2, p.2032–2048, 2009. Special Issue: Contribution of Fuzziness & Uncertainty to Modern Artificial Intelligence, Case-Based Reasoning.

DWYER, P. S. Computation with Approximate Numbers. In: LINEAR COMPUTATIONS, 1951, New York. **Anais...** Wiley & Sons Inc, 1951. p.11–35.

ESCARDó, M. H. **PCF extended with real numbers**: A domain-theoretic approach to higher-order exact real number computation. 1996. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Imperial College of the University of London, London. (available at http://www.dcs.ed.ac.uk/lfcsreps/ EXPORT/97/ECS-LFCS-97-374/index.html).

FILHO, E. d. A. **Iniciação à Lógica Matemática**. 16.ed. [S.l.]: São Paulo:Nobel, 1986. v.1.

FODOR, J. C. On Fuzzy Implication Operators. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.42, n.3, p.293–300, 1991.

FODOR, J. C. Contrapositive Symmetry of Fuzzy Implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.69, n.2, p.141–156, 1995.

FODOR, J.; ROUBENS, M. **Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.

GASSE, B. V.; CORNELIS, G.; DESCHRIJVER, G.; KERRE, E. On the Properties of a Generalized Class of t-Norms in Interval-Valued Fuzzy Logics. **New Mathematics and Natural Computation**, [S.l.], v.2, p.29–42, 2006.

GEHRKE, M.; WALKER, C.; WALKER, E. Some comments on interval valued fuzzy sets. **International Journal of Intelligent Systems**, [S.l.], v.11, n.10, p.751–759, 1996.

GEHRKE, M.; WALKER, C.; WALKER, E. Algebraic aspects of fuzzy sets and fuzzy logics. In: PAPADOPOULOS, B. K.; SYROPOULOS, A. (Ed.). **Proceedings of the 1rst. International Workshop on Current Trends and Development in Fuzzy Logic**. Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki, 1999. p.101–170.

RODABAUGH, S.; KLEMENTG, E. P. (Ed.). **Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets**: A handbook of recent developments in the mathematics of fuzzy sets. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. p.455–473.

GERA, Z.; DOMBI, J. Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.22, 2008.

GORZALCZANY, M. B. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.21, n.1, p.1–17, 1987.

GOTTWALD, S. **A Treatise on Many-Valued Logics**. London: Taylor & Francis Group, 2001.

GOTTWALD, S.; HAJEK, P. Triangular norm-based mathematical fuzzy logics. In: KLEMENT, E. P.; MESIAR, R. (Ed.). **Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms**. Amsterdam: Elsevier, 2005. p.275–299. (chapter 10).

GRATTAN-GUINESS, I. Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities. **Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**, [S.l.], v.22, n.1, p.149–160, 1976.

GRIGOLETTI, P.; DIMURO, G. P.; BARBOZA, L. V.; REISER, R. H. S. Análise Intervalar de Circuitos Elétricos. **TEMA – Tendencies in Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], v.7, n.2, p.287–296, 2006. available at http://www.sbmac.org.br/tema.

HATZIMICHAILIDIS, A.; KABURLASOS, V. G.; B. K. PAPADOPOULOS, B. An Implication in Fuzzy Sets. In: IEEE PROCEEDINGS INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2006, Vancouver, BC. **Anais. . .** [S.l.: s.n.], 2006. p.1–6.

HICKEY, T.; JU, Q.; EMDEM, M. Interval arithmetic: from principles to implementation. **Journal of the ACM**, [S.l.], v.48, n.5, p.1038–1068, 2001.

HáJEK, P. Basic fuzzy logic and BL-algebras. **Soft Computing**, [S.l.], v.2, p.124–128, 1998.

HU, C.; KEARFOTT, R. B.; KORVIN, A. de; KREINOVICH, V. (Ed.). **Knowledge Processing with Interval and Soft Computing**. London: Springer Verlag, 2008.

JAULIN, L.; KIEFFER, M.; DIDRIT, O.; WALTER, E. **Applied Interval Analisys**: with examples in parameter and state estimation, robust control and robotic. Heildelberg: Springer, 2001.

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M. Operations on type-2 fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.122, n.2, 2001.

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M.; LIANG, Q. L. Type-2 Fuzzy Logic Systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.7, n.6, p.643–658, Dec. 1999.

KEAFORT, R. B.; KREINOVICH, V. (Ed.). **Applications of Interval Computations**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. Quasi- and pseudo-inverses of monotone functions, and the construction of t-norms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.104, n.1, p.3–13, 1999.

KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. **Triangular Norms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000.

KLEMENT, E. P.; NAVARA, M. A survey on different triangular norm-based fuzzy logics. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.101, n.2, p.241–251, 1999.

KREINOVICH, V.; MUKAIDONO, M. Interval (pairs of fuzzy values), triples, etc.: Can we thus get an arbitrary ordering? In: **Proceedings of 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems,S an Antonio, TX, USA, 2000**. Los Alamitos: IEEE, 2000. v.1, p.234–238.

LODWICK, W. Preface. **Reliable Computing**, [S.l.], v.10, n.4, p.247–248, 2004.

MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J. Two types of implications derived from uninorms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.158, n.3, p.2612–2626, 2007.

MAS, M.; MONSERRAT, M.; TORRENS, J.; TRILLAS, E. A Survey on Fuzzy Implication Functions. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.15, n.6, p.1107–1121, 2007.

MENDEL, J. M. **Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems**: Introduction and New Directions. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.

MENDEL, J. M. Advances in Type-2 Fuzzy Sets and Systems. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.1, p.84–110, 2007.

MENDEL, J. M.; JOHN, R. I.; LIU, F. Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple. **IEEE T. Fuzzy Systems**, [S.l.], v.14, n.6, 2006.

MENDOZA, O.; MELIN, P.; LICEA, G. A hybrid approach for image recognition combining type-2 fuzzy logic, modular neural networks and the Sugeno integral. **Information Sciences**, [S.l.], v.179, n.13, p.2078–2101, 2009.

MENGER, K. Statical metrics. **Proceedings Nat. Acad. Sci.**, [S.l.], v.37, p.535–537, 1942.

MITRA, S.; PAL, S. K. Fuzzy Sets in Pattern Recognition and Machine Intelligence. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.156, n.3, p.381–386, 2005.

MOORE, R. **Methods and aplications of interval analysis**. [S.l.]: Philadelfia,SIAM, 1979.

MOORE, R. **Methods and Applications of Interval Analysis**. Philadelphia: SIAM, 1979.

MOORE, R. E. **Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing**. 1962. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Stanford University, Stanford.

MOORE, R. E. **Interval Anlysis**. [S.l.]: New Jersey:Prentice Hall, 1966.

MOORE, R. E.; LODWICK, W. Interval analysis and fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.135, n.1, p.5–9, 2003.

NAVARA, M. Characterization of measures based on strict triangular norms. **Mathematical Analysis and Applications**, [S.l.], v.236, n.2, p.370–383, 1999.

NGUYEN, H. T.; KREINOVICH, V.; ZUO, Q. Interval-valued degrees of belief: applications of interval computations to expert systems and intelligent control. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge-Based Systems**, [S.l.], v.5, n.3, p.317–358, 1997.

NGUYEN, H.; WALKER, E. **A First Course in Fuzzy Logic**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999.

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. C.; DIMURO, G. P.; SANTIAGO, R. T. N. Interval-Valued D-Implication. **TEMA – Tendencies in Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], v.10, n.1, p.63–74, 2009. available at http://www.sbmac.org.br/tema.

REISER, R. H. S.; BEDREGAL, B. C.; DIMURO, G. P.; SANTIAGO, R. T. N. Analyzing the Relationship between Interval- valued D-Implication and Interval-Valued QL-Implication. **TEMA – Tendencies in Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], v.11, n.1, p.89–100, 2010. available at http://www.sbmac.org.br/tema.

REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B. R. C.; SANTIAGO, R. H. N. Interval Valued D-Implications. In: NATIONAL CONGRESS ON COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS, BELéM, 2008, 21., 2008, São Carlos. **Proceedings...** SBMAC, 2008.

REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B. R. C.; SANTOS, H. S.; CALLEJAS-BEDREGAL, R.; POLEZEL, W. G. C. S-Implications on Complete Lattices and the Interval Constructor. **TEMA – Tendencies in Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], v.9, n.1, p.143–154, 2008. available at http://www.sbmac.org.br/tema.

REISER, R. H. S.; DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B.; SANTIAGO, R. Interval valued QL-implications. In: LEIVANT, D.; QUEIROZ, R. (Ed.). **Proceedings of the 14th International Workshop on Logic, Language, Information and Computation, WoLLIC 2007, Rio de Janeiro**. Berlin: Springer, 2007. n.4576, p.307–321. (LNCS).

ROSS, T. J. **Fuzzy logic with engineering applications**. [S.l.]: Nueva York, EUA : McGraw-Hill, 1995.

RUAM, D.; KERRE, E. fuzzy implication operators and generalized fuzzy methods of cases. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.1, n.54, p.23–37, 1993.

RUIZ-AGUILERA, D.; TORRENS, J. S- and R-implications from uninorms continuous in $]0,1[^2$ and their distributivity over uninorms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.160, n.6, p.832–852, 2009.

RUMP, S. M. Fast and Parallel Interval Arithmetic. **BIT**, [S.l.], v.39, n.3, p.534–554, 1999.

SAINIO, E.; TURUNEN, E.; MESIAR, R. A characterization of fuzzy implications generated by generalized quantifiers. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.4, p.491–499, 2008.

SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. C.; ACIóLY, B. M. Comparing continity of interval function based on Moore and Scott continuity. **Electronic Journal on Mathematics of Computation**, [S.l.], v.2, n.1, p.1–14, 2005.

SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. C.; ACIóLY, B. M. Formal Aspects of Correctness and Optimality in Interval Computations. **Formal Aspects of Computing**, [S.l.], v.18, n.2, p.231–243, 2006.

SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. Associative Functions and Statistical Triangle Inequalities. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, [S.l.], v.8, p.168–186, 1961.

SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. **Probabilistic Metric Spaces**. New York: North-Holland, 1983.

SHI, Y.; GASSE, B. V.; RUAN, D.; KERRE, E. E. On the first place antitonicity in QL-implications. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.159, n.22, p.2988–3013, 2008.

SHI, Y.; RUAN, D.; KERRE, E. E. On the characterizations of fuzzy implications satisfying $I(x, y) = I(x, I(x, y))$. **Information Sciences**, [S.l.], v.177, n.145, p.2954–2970, 2007.

SILER, W.; BUCKLEY, J. J. **Fuzzy Expert Systems and Fuzzy Reasoning**. New York: John Wiley, 2004.

SIMÕES, M. G.; SHAW, I. **Controle e Modelagem Fuzzy**. II.ed. [S.l.]: São Paulo:Blucher, 2007.

STADTHERR, M. A.; XU, G.; BURGOS-SOLORZANO, G. I.; HAYNES, W. D. Reliable Computation of Phase Stability and Equilibrium Using Interval Methods. **International Journal of Reliability and Safety**, [S.l.], v.1, n.4, p.465–488, 2007.

TAKAHASH, A.; BEDREGAL, B. T-Normas,t-Conormas, Complementos e Implicações Intervalares. **TEMA.Tend.Mat.Apli.Comput.**, [S.l.], v.7, n.1, p.139–148, 2006.

TRILLAS, E.; VALVERDE, L. On implication and indistinguishability in the setting of fuzzy logic. In: KACPRZYK, J.; YAGER, R. R. (Ed.). **Management Decision Support Systems using Fuzzy Sets and Possibility Theory**. Cologne: Verlag TUV Rheinland, 1985. p.198–212.

TURKSEN, I. B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.20, n.2, p.191–210, 1986.

TURSKEN, I. B.; KREINIVICH, V.; YAGER, R. R. A new class of fuzzy implication. Axioms of fuzzy implications revisited. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.100, p.267–272, 1998.

YAGER, R. R. An Approach to Inference in Approximate Reasoning. **International Journal of Man-Machine Studies**, [S.l.], v.13, n.3, p.323–338, 1980.

YAGER, R. R. On the implication operator in fuzzy logic. **Information Sciences**, [S.l.], v.31, n.2, p.141–164, 1983.

YAGER, R. R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. **Information Sciences**, [S.l.], v.167, n.1–4, p.193–216, 2004.

YAGER, R. R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. **Information Sciences**, [S.l.], v.167, n.1–4, p.193–216, 2004.

YAM, Y.; MUKAIDONO, M.; KREINOVICH, V. Beyond [0,1] to intervals and further: Do we need all new fuzzy values? In: **Proceedings of the 8th International Fuzzy Systems Association World Congress**. Taipei: IFSA, 1999. p.143–146.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, n.3, p.338–353, 1965.

ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. **Information Sciences**, [S.l.], v.8, n.3, p.199–249, 1975.

ZADEH, L. A. Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing. **Communications of the ACM**, [S.l.], v.37, n.3, p.77–84, 1994.

ZADEH, L. A. Is there a need for fuzzy logic? **Information Sciences**, [S.l.], v.178, n.13, p.2751–2779, 2008.